Міністерство освіти і науки України
Донбаська державна машинобудівна академія

О.Г.Водолазська, С.В.Подлєсний, В.М.Іскрицький

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

ДИНАМІКА

Аналітична механіка

Затверджено
на методичному семінарі кафедри
технічної механіки
Протокол № 7 від 14 лютого 2012 р.

Краматорськ 2012

УДК 531.
ББК 22.21
В-62

Водолазська, О.Г.

В-62 Теоретична механіка. Розділ Динаміка. Ч. 3. Аналітична механіка.: навчальний посібник для студентів механічних спеціальностей / О.Г.Водолазська, С.В.Подлєсний, В.М.Іскрицький. – Краматорськ: ДДМА, 2012 – 176 с.

ISBN

Навчальний посібник містить теоретичний матеріал, методику та приклади розв'язання задач з третього розділу теоретичної механіки «Аналітична механіка» для студентів усіх спеціальностей.

УДК 531.
ББК 22.21

ISBN

ЗМІСТ

ВСТУП

Третя частина навчального посібника «Динаміка» присвячена аналітичній механіці.

У цій частині даються поняття в'язей і можливих переміщень у класичному стилі. Після викладення принципу можливих переміщень, наводиться методика розв'язання задач і приклади застосування принципу можливих переміщень.

Після ознайомлення з поняттями узагальнених координат, узагальненими швидкостями і узагальненими силами подані умови рівноваги системи в узагальнених координатах. Основна умова приділена загальному рівнянню динаміки, структурі та складанню рівнянь Лагранжа, а також методиці і прикладам розв'язання задач із застосуванням загальних рівнянь динаміки і рівнянь Лагранжа для механічних систем з одним і двома ступенями свободи.

Значний об'єм посібника займають питання про застосування рівняння Лагранжа другого роду до вивчення малих коливань механічної системи.

Розглянуті поняття стійкості рівноваги механічної системи, наведені загальні відомості про коливання системи; виведені диференціальні рівняння коливань механічної системи у різноманітних випадках з урахуванням лінійного опору. Подана методика і приклади розв'язання задач для систем з одним і двома ступенями вільності.

Навчальний посібник «Динаміка» розрахований на студентів денної та заочної форм навчання технічних вузів за повною і скороченою програмами з теоретичної механіки, а також може бути використаний аспірантами та інженерно-технічними працівниками машинобудівних галузей промисловості.

1 АНАЛІТИЧНА МЕХАНІКА. КЛАСИФІКАЦІЯ В’ЯЗЕЙ. ПРИКЛАДИ В’ЯЗЕЙ

Істотним недоліком загальних принципів Ньютона і Даламбера є те, що рівняння динаміки, які складаються на їх підставі, містять невідомі реакції в’язей. Сили, які належать до категорії реакцій в’язей, не можуть бути визначені доти, доки з рівнянь динаміки не виведено кінематичне рівнянь руху.

У разі застосування даних методів задачі динаміки розв’язуються поетапно. Спочатку з динамічних рівнянь виключаються невідомі реакції в’язей, після чого інтегруванням цих перетворених рівнянь визначається рух за відомими активними системами та початковими умовами. Таким чином, отримавши кінематичні рівняння руху, знову повертаються до початкових, не звільнених від реакцій в’язей рівнянь і продовжують розв’язувати задачу на визначення реакції в’язей за відомим рухом і активними силами. У складних задачах динаміки процедура виключення з рівнянь динаміки невідомих реакцій в’язей для отримання рівнянь, які містять лише задані сили, може бути громіздкою і неефективною. Тому в таких випадках застосовують інші методи, в яких ще на стадії виведення динамічних реакцій позбавляються невідомих реакцій в’язей, а саме: методи аналітичної механіки.

Упродовж майже двохсотрічнього періоду існування аналітичної механіки були розроблені особливі методи дослідження, які виявилися настільки ефективними, що проникли в суміжні галузі: геометрію, прикладну математику, загальну теорію відносності, термодинаміку, електродинаміку, теорію оптимального керування, робототехніку, статичну фізику і квантову механіку.

Основою аналітичної механіки є три групи фундаментальних положень.

До першої групи відносять варіаційні принципи, які у простій інваріантній формі містять формулювання найбільш загальних закономірностей механіки. До них належать принципи, які будуть розглядатися нижче в цій частині: диференціальні принципи можливих переміщень і Даламбера – Лагранжа, а також інтегральний принцип Гамільтона – Остроградського.

Друга група фундаментальних положень об'єднує диференціальні рівняння руху механічних систем, які є наслідком варіаційних принципів. Із них нижче будуть розглянуті рівняння Лагранжа другого роду в різних їх формах, канонічні рівняння динаміки тощо.

Третя група фундаментальних положень аналітичної механіки об'єднує загальні методи інтегрування рівнянь динаміки. Центральне місце тут посідає метод Гамільтона-Якобі, а також теорема Пуассона.

Основоположними поняттями цього розділу механіки є: уявлення про в'язі та їх класифікація; також поняття про дійсні і можливі переміщення системи.

В аналітичній механіці необхідно більш докладно розглянути в'язі, що накладені на точки механічної системи. *Умови, що обмежують вільне переміщення точок механічної системи, називаються в'язями. Математично в'язі можуть бути виражені рівняннями або нерівностями, до яких входять час, координати всіх або частини точок системи і їх похідні за часом різних порядків.*

Для однієї точки рівняння в'язі в загальному випадку можна виразити у формі:

$$f(x, y, z;\ \dot{x}, \dot{y}, \dot{z};\ \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z};\ \ldots;\ t) = 0\,. \qquad (1)$$

Надалі обмежимося розглядом в'язей, до рівнянь яких можуть входити похідні за часом від координат не вище першого порядку.

Для механічної системи, що складається з N точок, l рівнянь в'язей подаються системою рівнянь:

$$f_s(x_k, y_k, z_k;\ \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k;\ t) = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, l\,. \qquad (2)$$

Вважається, що індекс k набуває всіх або частини значень від 1 до N як для координат, так і для їхніх похідних.

Якщо до рівняння в'язей (2) входять тільки координати точок і не входять похідні від координат, то в'язі називаються ***геометричними****. Рівняння геометричної в'язі для системи має форму:*

$$f(x_k, y_k, z_k;\ t) = 0\,. \qquad (3)$$

Якщо в рівняння в'язей крім координат входять ще і їхні похідні за часом (проекції швидкостей точок на осі координат) або тільки одні похідні, за часом, то в'язі називаються ***кінематичними***. У цьому випадку рівняння в'язей є диференціальними рівняннями для координат точок. З рівнянь геометричних в'язей диференціюванням можна одержати в'язі кінематичні. З кінематичних в'язей геометричні виходять не завжди, тому що диференціальні рівняння не завжди можуть бути проінтегровані. Іноді диференціальне рівняння в'язі можна подати як похідну за часом від деякої функції координат i, можливо, часу:

$$\frac{d}{dt} f(x_k, y_k, z_k, t) = 0. \tag{4}$$

Після інтегрування така кінематична в'язь стає геометричною.

Усі геометричні та інтегровані кінематичні зв'язки називаються ***голономними***.

Кінематичні в'язі, які не можна проінтегрувати, тобто не можна звести до геометричних, є ***неголономними*** в'язями, вони інтенсивно досліджуються і в наш час. Надалі системи з такими неголономними в'язями у цьому посібнику не розглядаються.

При русі механічної системи координати точок й їхні похідні за часом, що входять до рівняння в'язей, можуть залежати від часу t. Крім того, до рівняння в'язей час t може входити явно, крім координат і їх похідних.

В'язі, до рівняння яких час явно не входить, називаються ***стаціонарними****, або* ***склерономними****. Якщо час входить явно до рівняння в'язей, то в'язь називається* ***нестаціонарною****, або* ***реономною***. Нестаціонарні в'язі звичайно реалізуються за допомогою тіл, які рухаються, або тіл, що деформуються. У найпростішому випадку однієї точки нестаціонарна геометрична в'язь у формі поверхні, яка рухається або деформується, має рівняння

$$f(x, y, z, t) = 0. \tag{5}$$

В'язі називаються ***незвільняючими*** *або* ***двобічними****, якщо вони виражаються математично рівняннями, і* ***звільняючими*** *або*

***однобічними**, якщо вони виражаються нерівностями.* Для однієї точки M, скріпленої з кінцем однорідного стрижня, інший кінець якого закріплений у нерухомій точці O, в'язь (твердий стрижнь) є геометричною, не звільняючою (рис. 1). Рівняння такої в'язі має вигляд:

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0,$$

де l – довжина стрижня.

Якщо стрижень замінити ниткою такої ж довжини, то в'язь (нитка) буде звільняючою. Вона математично виражається нерівністю $x^2 + y^2 + z^2 - l^2 \leq 0$. Якщо при русі точка M виявиться від точки O на відстані, менше довжини нитки, то нитка вже не обмежує вільне переміщення точки. В'язь звільняє точку від своєї дії (пунктирна лінія на рис. 1). Надалі звільняючі в'язі розглядати не будемо.

Розглянемо наступний приклад нестаціонарної голономної в'язі – прямолінійну циліндричну трубку невеликого діаметра, одним своїм кінцем закріплену на вертикальному валі перпендикулярно до його осі, в якій уздовж її осі може вільно рухатися кулька. Вважатимемо, що трубка разом із кулькою в ній обертається з постійною кутовою швидкістю w (рис. 2).

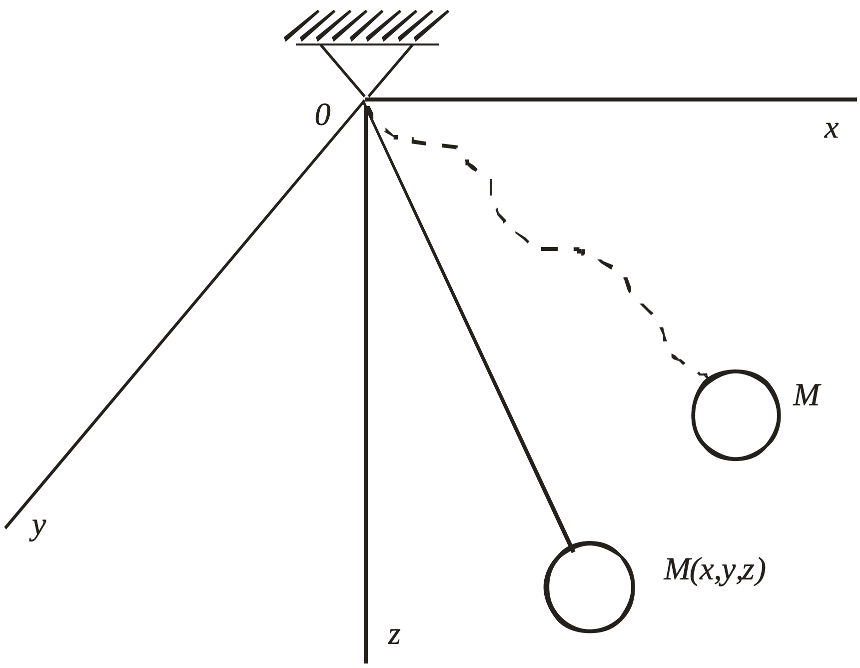


Рисунок 1

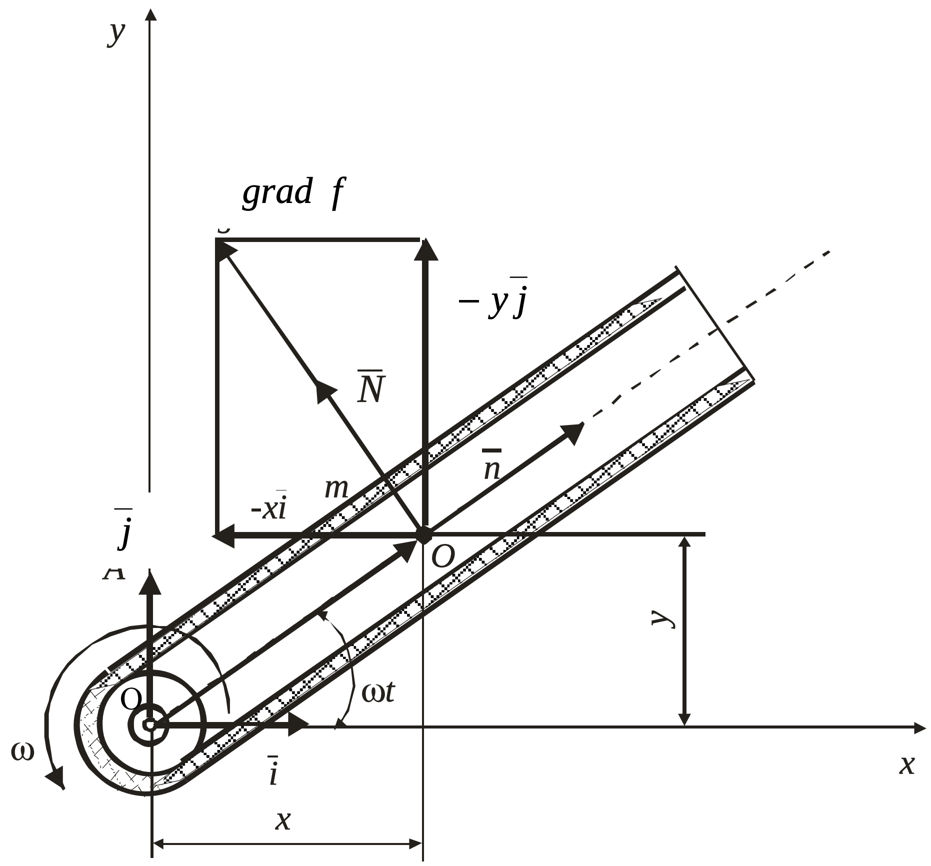


Рисунок 2

Якщо осі Ox, Oy спрямувати, як на рисунку 2, то в’язь у вигляді обмежувальних прямолінійних стінок трубки, які за її рівномірного обертання примушують кульку весь час знаходитися на її осі, описуються рівнянням

$$y - x\ tg w t = 0.$$

Інший приклад – прямокутна призма, яка прямолінійно поступально з постійним прискоренням $\bar{a}$ рухається вздовж горизонтальної поверхні. На похилій грані призми, яка утворює з горизонтом заданий кут a, знаходиться тіло, що може вільно рухатись по ній (рис. 3).

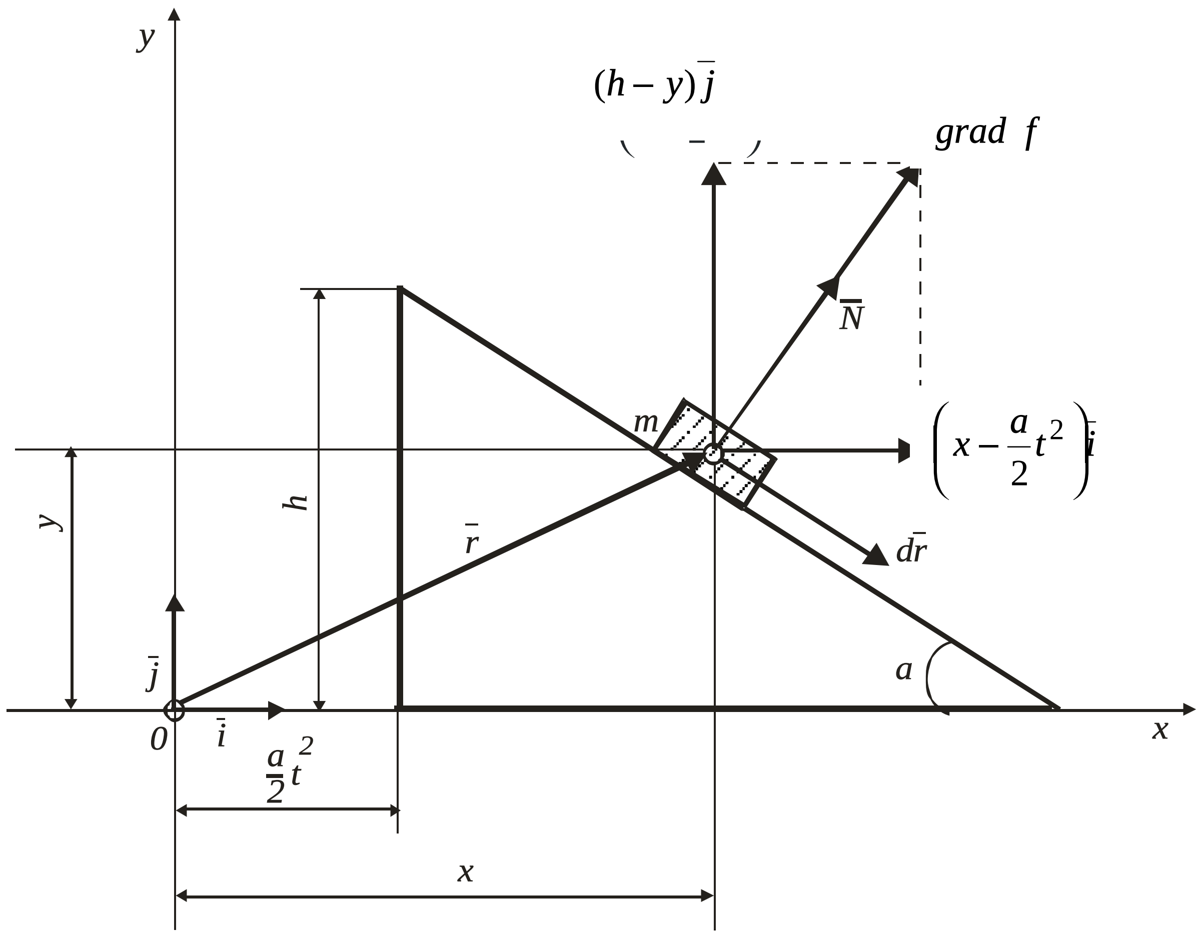


Рисунок 3

У разі вибору основної системи осей Oxy, як на рисунку 3, рівняння в'язі запишеться так:

$$y + x \cdot tg\ a\ - (h + \frac{a}{2}t^2 \cdot tg\ a\ ) = 0\,.$$

Якщо точка m вимушено рухається по поверхні іншого тіла, яке саме перебуває у заданому русі, або у стані спокою (рис. 4), то в системі декартових прямокутних осей $Oxyz$ таке обмеження поверхні на положення точки, очевидно, записується рівнянням (5).

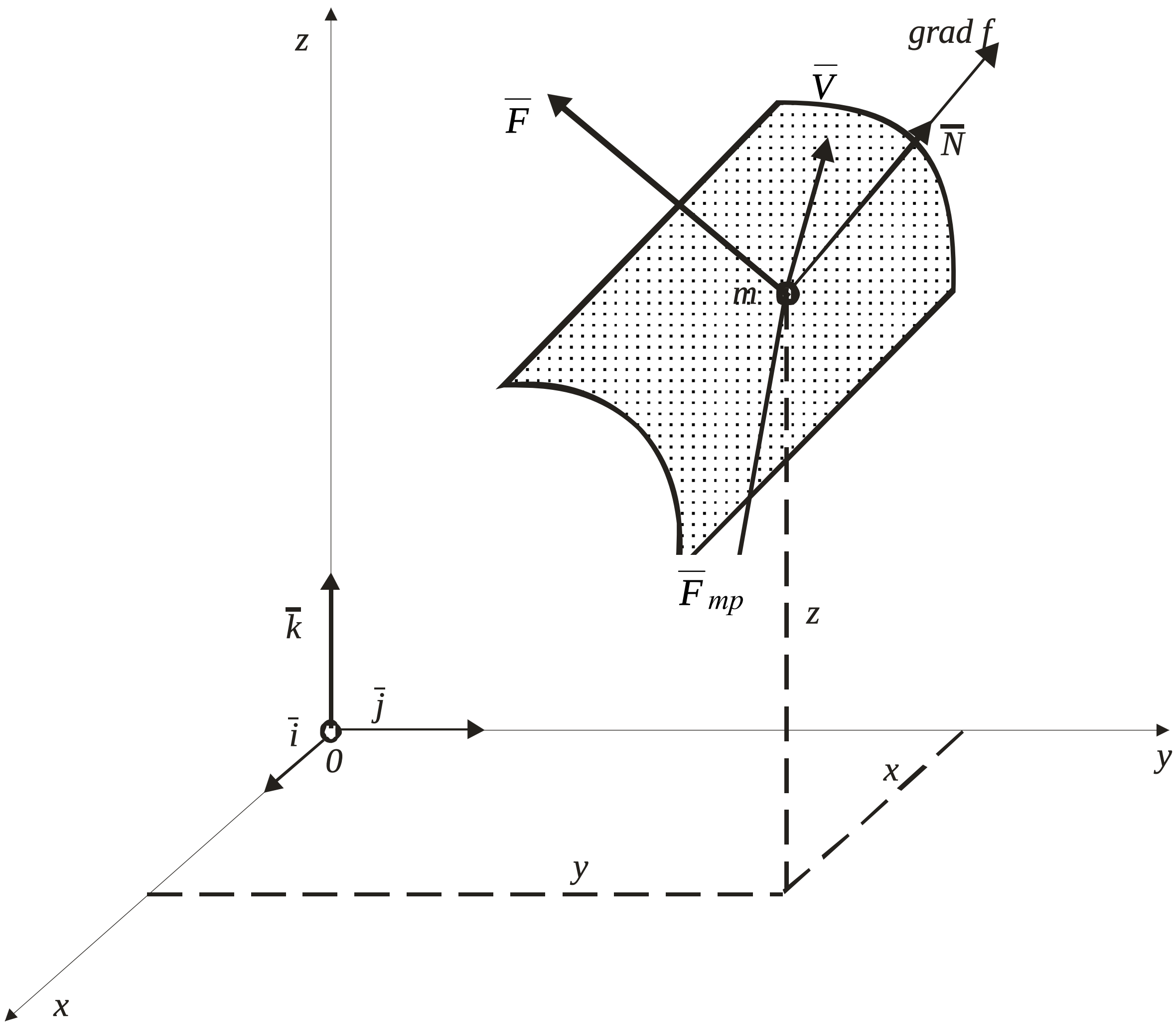


Рисунок 4

У разі руху точки заданою просторовою кривою, наприклад, маленького круглого кільця по дротині, яка сама перебуває в заданому русі, обмежувальна крива в декартових координатах описується двома рівняннями, кожне з яких визначає просторову поверхню. Перетин таких двох поверхонь і визначає задану криву, якою вимушено рухається точка m (рис. 5):

$$f_1(x, y, z; t) = 0\,,$$

$$f_2(x, y, z; t) = 0\,.$$

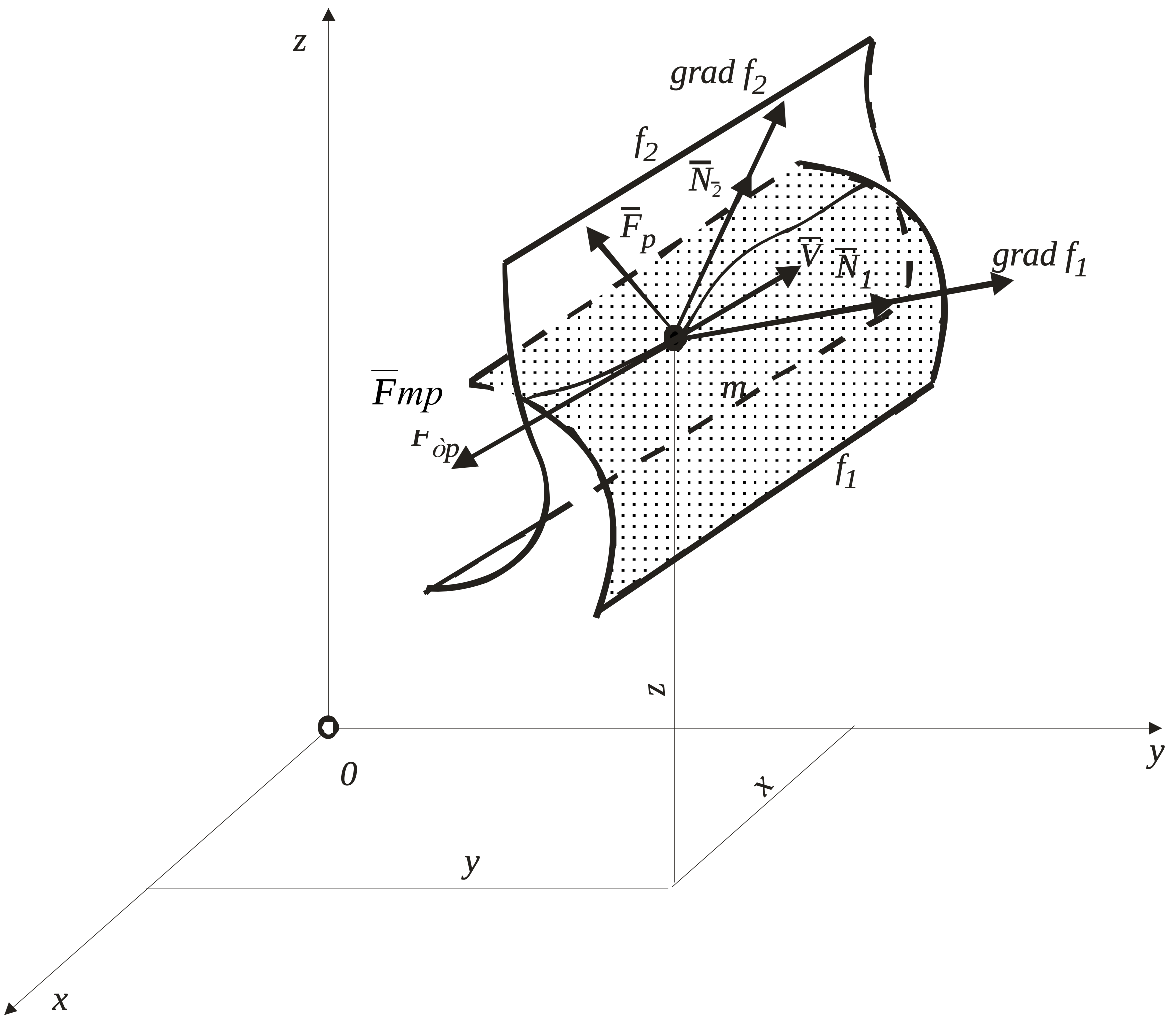


Рисунок 5

Зауважимо, що розглядаються так звані удержувальні (незвільняючі), або двобічні, в’язі, бо вони описуються рівностями. Це означає, що точка за жодних обставин не може позбутися в’язі.

Крім того, всі в’язі можна розподілити на реальні й ідеальні. До ідеальних в’язей відносяться всі в’язі без тертя. Деякі в’язі з тертям теж можна віднести до ідеальних. Поняття ідеальних в’язей буде наведене після введення можливого переміщення системи.

2 МОЖЛИВІ ПЕРЕМІЩЕННЯ

Для формулювання принципу можливих переміщень, що визначає умови рівноваги механічної системи, потрібно ввести поняття можливого, або віртуального, переміщення.

Можливим переміщенням точки називається таке миттєве нескінченно мале (елементарне) уявне переміщення, що допускається в розглянутий момент часу накладеними на точку в'язями. Для можливого переміщення не потрібно часу на його здійснення. Це уявне переміщення, що могла б здійснити точка при накладених на неї в'язах у розглянутий момент часу. На відміну від елементарного (нескінченно малого) дійсного переміщення точки $d\bar{r}$, що здійснює точка за час dt під дією прикладених сил при заданих початкових умовах і накладених в'язях, можливе переміщення $d\bar{r}$ визначається тільки в'язями у цей момент. Проекції можливого переміщення $d\bar{r}$ на осі координат, або варіації координат, позначають $d\,x, d\,y, d\,z$, а проекції елементарного дійсного переміщення на осі координат, або диференціали координат при зміні часу на dt, позначають dx, dy, dz.

Якщо в'яззю для точки є, наприклад, поверхня, яка рухається і рівняння якої $f(x, y, z, t) = 0$, то дійсне переміщення точки $d\bar{r}$ за час dt є в загальному випадку векторною сумою переміщень вздовж поверхні і разом з поверхнею. Усі можливі переміщення точки $d\bar{r}$ у цей момент часу t розташуються на поверхні в положенні, що вона займає в розглядувальний момент часу. Дійсне переміщення при заданих початкових умовах і силах, яке точка може здійснити від моменту часу t до моменту $t + dt$, тільки одне. Можливих переміщень у точки в момент часу t нескінченно багато. Усі вони допускаються в'яззю (поверхнею) і як відрізки нескінченно малої довжини розташовуються в дотичної площині до поверхні в точці, у якій перебуває розглянута точка в цей момент часу.

Можливе переміщення $d\bar{r}$, як і дійсне $d\bar{r}$, є вектором і тому завжди зображується спрямованим прямолінійним відрізком. Очевидно, що елементарне дійсне переміщення точки належить до числа можливих, якщо в'язь стаціонарна, тобто дійсне переміщення не містить переміщення разом з в'яззю.

Можливе переміщення точки $d\bar{r}$ вважають ізохронною варіацією радіуса-вектора, тобто його повним диференціалом, але при фіксованому часі, коли змінюються (варіюються) тільки координати точки. Відповідно

dx, dy, dz – ізохронні варіації координат точки, що допускають в'язі. Дійсне переміщення $d\bar{r}$ є повним диференціалом радіуса-вектора, що визначається зі зміною координат точки залежно від зміни часу; dx, dy, dz - повні диференціали координат точки при зміні незалежного змінного часу t на величину dt.

Можливим переміщенням системи називають будь-яку сукупність можливих переміщень точок системи. У загальному випадку система може мати декілька і навіть нескінченно багато можливих переміщень.

Внаслідок рівнянь в'язей, накладених на систему, не всі можливі переміщення є незалежними. Число незалежних можливих переміщень називають ***числом степенів вільності системи****.*

Вільна точка має три степені вільності. У цьому випадку можливі переміщення (варіації) dx, dy, dz (або вирази через варіації яких-небудь інших координат) є незалежними. Якщо точка рухається вздовж поверхні $f(x, y, z, t) = 0$, то dx, dy, dz зв'язані співвідношенням

$$d f = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0, \tag{6}$$

яке одержують розкладанням у степеневий ряд функції $f(x+dx,\ y+dy,\ z+dz,\ t) = 0$ при нехтуванні складовими другого і більше високого порядку у відношенні до dx, dy, dz. Незалежних варіацій координат, а отже, і ступенів вільності, буде дві. Час при цьому не варіюється, він фіксований. Зв'язок між варіаціями координат не залежить від того, входить час явно до рівняння в'язей чи ні. Проекції на осі координат дійсного переміщення точки dx, dy, dz зв'язані залежністю

$$d f = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0, \tag{7}$$

яку теж одержують розкладанням у степеневий ряд функції $f(x+dx,\ y+dy,\ z+dz,\ t+dt) = 0$ і відкиданням складових другої і більш високого ступеня величин dx, dy, dz, dt. Якщо точка рухається вздовж кривої лінії, то ступінь вільності у неї буде лише один, тому що криву лінію можна зобразити як перетинання двох поверхонь.

3 ЕЛЕМЕНТАРНА РОБОТА СИЛИ НА МОЖЛИВОМУ ПЕРЕМІЩЕННІ. ІДЕАЛЬНІ В'ЯЗІ

Елементарну роботу сили на можливому переміщенні її точки прикладення обчислюють за звичайними формулами, аналогічними для елементарної роботи на дійсному переміщенні, наприклад, $dA = \overline{F} \cdot d\overline{r}; dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz$, й іншими формулами для елементарної роботи. Для механічної системи, що складається з N точок, до яких прикладені сили, елементарна робота цих сил на якому-небудь можливому переміщенні системи, відповідно, буде така:

$$dA = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{F}_k \, d\overline{r}_k. \tag{8}$$

Елементарна робота сил при цьому залежить від вибору можливого переміщення системи.

Позначимо сили реакцій в'язей для точок системи $\overline{R}_k$. Тоді дамо визначення ідеальної в'язі.

*В'язі системи називаються **ідеальними**, якщо для будь-якого можливого переміщення системи виконується умова:*

$$\sum_{k=1}^{N} \overline{R}_k \, d\overline{r}_k = 0. \tag{9}$$

Умова (9) є визначенням ідеальних в'язей. Важливо відзначити, що ця умова повинна виконуватися для всіх можливих переміщень системи. При цьому вся сукупність в'язей є ідеальною. Хоча може бути ідеальною кожна із в'язей окремо.

Наведемо приклади ідеальних в'язей.

1 В абсолютно твердому тілі точки пов'язані ідеальними в'язями. Сили реакції в'язей у цьому випадку є внутрішніми силами, для яких було доведено, що сума елементарних робіт цих сил на будь-яких елементарних переміщеннях точок тіла дорівнює нулю.

2 Абсолютно гладенька поверхня або абсолютно гладенька лінія є ідеальною в'яззю для точки. Можливі переміщення точки з такими в'язями спрямовані за дотичними до поверхні або лінії (рис. 6). Сили реакцій у цих випадках спрямовані вздовж нормалі до них, тобто перпендикулярні переміщенням. Так, наприклад, всі шарніри (поверхні) без тертя, рухомі і нерухомі, є в'язями, ідеальними для тіл, з'єднаних такими в'язями. Шарніри без тертя, як ідеальні в'язі, еквівалентні в'язям між точками у твердому тілі.

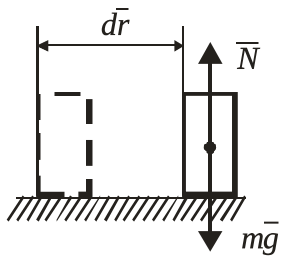


Рисунок 6

3 Гнучкі нерозтяжні в'язі типу ниток, канатів, тросів і т.п., що з'єднують точки системи, є в'язями ідеальними. У кожному перетині такої в'язі сили реакцій (сили натягу) рівні за модулем і протилежні за напрямком, а можливі переміщення в їхніх точках прикладання однакові (рис. 7). Сума елементарних робіт сил натягів для всіх уявних перетинів таких в'язей дорівнює нулю:

$$\bar{T}^{/}\partial\bar{r} - \bar{T}dr = 0\,.$$

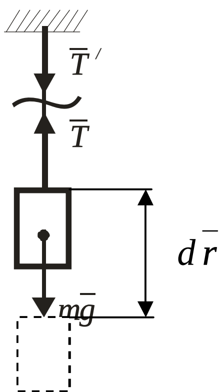


Рисунок 7

4 Закріплені точки системи кожна окремо є в'язями ідеальними, тому що їхні можливі переміщення дорівнюють нулю.

5 Шорстка поверхня для котків, що котяться по ній без ковзання, при відсутності тертя кочення є в'язями ідеальними. Можливі переміщення в точці або в точках лінії зіткнення дорівнюють нулю в кожен момент часу, тому що дорівнюють нулю швидкості в точках дотику, бо вони прикладені в миттєвому центрі швидкостей, як і для закріплених точок (рис. 8).

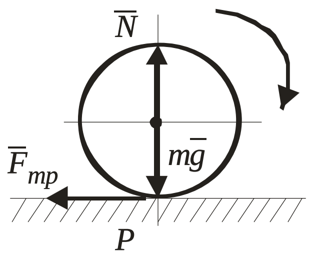


Рисунок 8

$$V_p = 0.$$

$$F_{mp} \cdot d\,S_p = 0, \text{ так як } d\,S_p = 0.$$

4 ПРИНЦИП МОЖЛИВИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ

Принцип можливих переміщень – це найзагальніший принцип аналітичної механіки. Із нього можна вивести умови рівноваги будь-якої конкретної механічної системи. Принцип встановив Лагранж і багато років це було положення, застосоване без доведення, але зараз його розглядають як теорему.

Принцип можливих переміщень, або принцип Лагранжа, містить необхідні й достатні умови рівноваги механічних систем і формулюється в такий спосіб.

Для рівноваги механічної системи, яка підпорядковується ідеальним, голономним, стаціонарним і не звільняючим в'язям , необхідно й *достатньо, щоб сума елементарних робіт всіх активних сил, прикладених до точок системи, дорівнювала нулю на будь-якому можливому переміщенні системи, якщо в початковий момент часу система нерухома, або швидкості точок системи в розглядувальний момент часу дорівнюють нулю, тобто*

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot d\,\bar{r}_k = 0, \tag{10}$$

де $\bar{F}_k$ – активна сила, прикладена до k-ї точки системи;

$\bar{r}_k$ – радіус-вектор цієї точки (рис. 9).

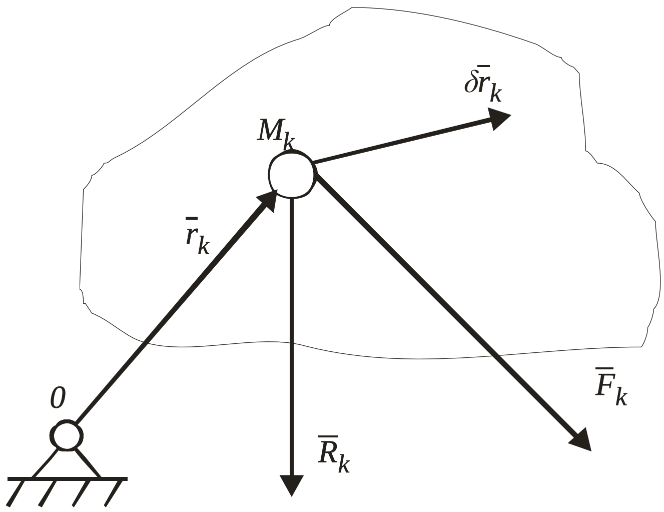


Рисунок 9

Доведемо необхідність умови (10) для рівноваги системи, тобто доведемо, що якщо система перебуває в рівновазі, то активні сили задовольняють умови (10). Дійсно, якщо механічна система перебуває в рівновазі, то для кожної її точки активна сила $\bar{F}_k$ і сила реакції в'язей $\bar{R}_k$ задовольняють умові рівноваги статики для сил, прикладених до точки: $\bar{F}_k + \bar{R}_k = 0$. Домножимо цю рівність на $d\,\bar{r}_k$, отримаємо:

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{R}_k \cdot d\,\bar{r}_k + \sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot d\,\bar{r}_k = 0.$$

За умовою (9) ідеальності в'язей $\sum_{k=1}^{N} \overline{R}_k \cdot d\ \bar{r}_k = 0$, тоді для активних сил одержуємо умову (10):

$$\sum_{k=1}^{N} \overline{F}_k \cdot d\ \bar{r}_k = 0.$$

Доведемо достатність умови (10) для рівноваги системи, тобто, якщо ця умова виконується для активних сил, що діють на точки системи, то система перебуває в рівновазі при виконанні інших умов принципу можливих переміщень. Теорема про достатність умови (10) для рівноваги системи доводиться методом від супротивного. Передбачається, що умова (10) і вся решта умов теореми виконуються, а система втратила рівновагу. Якщо теорема про достатність справедлива, то повинне виникнути протиріччя з умовами теореми. Отже, нехай всі умови теореми виконуються, а система втратила рівновагу. При цьому, принаймні, для однієї точки системи не буде виконуватися умова рівноваги для сил, тобто

$$\overline{F}_k + \overline{R}_k \neq 0. \tag{11}$$

Дамо системі можливе переміщення. Так як в'язі стаціонарні, то елементарне дійсне переміщення для кожної точки системи під дією рівнодіючої сили, яка не дорівнює нулю, належить до можливих переміщень. Сукупність цих можливих переміщень можна обрати як можливе переміщення системи. Швидкості точок системи в розглядувальний момент часу за умовою дорівнюють нулю; отже, елементарні дійсні переміщення будуть спрямовані за векторами прискорень точок, тобто вздовж рівнодіючих сил. Множачи рівняння (11) скалярно на $d\ \bar{r}_k = d\bar{r}_k$, одержимо:

$$\left(\overline{F}_k + \overline{R}_k\right) \cdot d\ \bar{r}_k > 0, \tag{12}$$

принаймні, для однієї точки системи, що вийшла з рівноваги. Проведемо математичну операцію додавання з рівняння (12) за всіма точками системи, будемо мати:

$$\sum_{k=1}^{N}\overline{F}_k\cdot d\ \overline{r}_k+\sum_{k=1}^{N}\overline{R}_k\cdot d\ \overline{r}_k>0\,. \qquad (13)$$

Для ідеальних в’язей , що накладені на систему, $\sum_{k=1}^{N}\overline{R}_k\cdot d\ \overline{r}_k=0$.

Тому з рівняння (13) одержуємо $\sum_{k=1}^{N}\overline{F}_k\cdot d\ \overline{r}_k>0$, що суперечить умові (10). Отже система не може вийти з рівноваги при виконанні умов принципу можливих переміщень. Принцип повністю доведений.

Без додаткової умови про рівність нулю швидкостей точок системи в розглянутий момент принцип можливих переміщень затверджує тільки те, що дорівнюють нулю прискорення точок системи. Разом з рівністю нулю швидкостей точок це дає рівновагу системи в той момент, у який виконується для активних сил умова (10). При тривалому виконанні цієї умови система, відповідно, буде перебувати в рівновазі теж досить довго тобто швидкості і прискорення точок дорівнюють нулю, якщо швидкості точок системи дорівнюють нулю на початку інтервалу тривалості.

До принципу можливих переміщень не входять сили реакцій в’язей. Але його можна застосувати також і для визначення невідомих сил реакцій в’язей. Для цього в’язь, сили реакції якої необхідно визначити, відкидають (звільняють систему від цієї в’язі), заміняючи її силами реакції. Ці сили додають до активних сил. В’язі, які залишилися, повинні бути ідеальними. Іноді неідеальну в’язь заміняють ідеальною, компенсуючи неідеальність відповідними силами. Так, якщо в’яззю для тіла є шорстка поверхня, то її можна замінити гладенькою поверхнею, додаючи до активних сил силу тертя ковзання і у більше загальному випадку – ще і пару сил, що перешкоджає коченню. В’язь у вигляді жорсткого закріплення для твердого тіла можна замінити нерухомим шарніром (плоским або кульовим відповідно), додаючи реактивний момент жорсткого закріплення (векторний або алгебраїчний). Таким чином, до принципу можливих переміщень входять в дійсності не лише активні сили, а всі прикладені до точок механічної сили, крім сил реакцій ідеальних в’язей, які за умовами задач не потрібно визначати.

5 МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ І ПРИКЛАДИ ЗАСТОСУВАННЯ ПРИНЦИПУ МОЖЛИВИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ

5.1 Методика розв'язання задач

Послідовність розв'язання задач на застосування принципу можливих переміщень може бути такою:

- виділити об'єкт рівноваги;
- за наявності неідеальних в'язей віднести відповідні сили тертя до активних сил, після чого розглядати в'язі, як ідеальні;
- визначити систему всіх активних сил, включаючи сили тертя, показати їх на розрахунковій схемі;
- у випадку визначення реакції в'язі слід умовно відкинути в'язь, замінивши її шуканою реакцією в'язі;
- визначити кількість ступенів вільності системи;
- обрати незалежні можливі переміщення точок системи у кількості, яка дорівнює кількості ступенів вільності;
- надати системі можливого переміщення в кількості, яка відповідає кожному із ступенів вільності системи. Виразити можливі переміщення точок прикладення сил залежно від заданого можливого переміщення;
- обчислити суму елементарних робіт всіх сил (заданих, реакцій неідеальних в'язей, шуканої сили реакції в'язі) на відповідних можливих переміщеннях точок їх прикладення і цю суму прирівняти до нуля;
- прирівняти до нуля коефіцієнти при незалежних переміщеннях, що містяться в рівнянні елементарних робіт. Це дає змогу скласти систему рівнянь рівноваги, кількість яких дорівнює кількості незалежних можливих переміщень, тобто кількості ступенів вільності системи.
- розв'язати складену систему рівнянь рівноваги і визначити шукані величини;
- проаналізувати розв'язки з метою визначення області їх застосування.

5.2 Приклади застосування принципу можливих переміщень

Приклад 1. *У механізмі (рис.10) кривошип ОА може обертатися навколо горизонтальної осі, що проходить через точку О. Вздовж стрижня ОА може переміщуватися повзун В, шарнірно з'єднаний зі стрижнем СВ, що може ковзати вздовж вертикальних напрямних. До кривошипа ОА прикладена пара сил з моментом М; OD =l.*

Визначити при рівновазі механізму вертикальну силу $\overline{F}$ *, прикладену до стрижня СВ залежно від кута j . Силами тертя й ваги ланок механізму знехтувати.*

Розв'язання

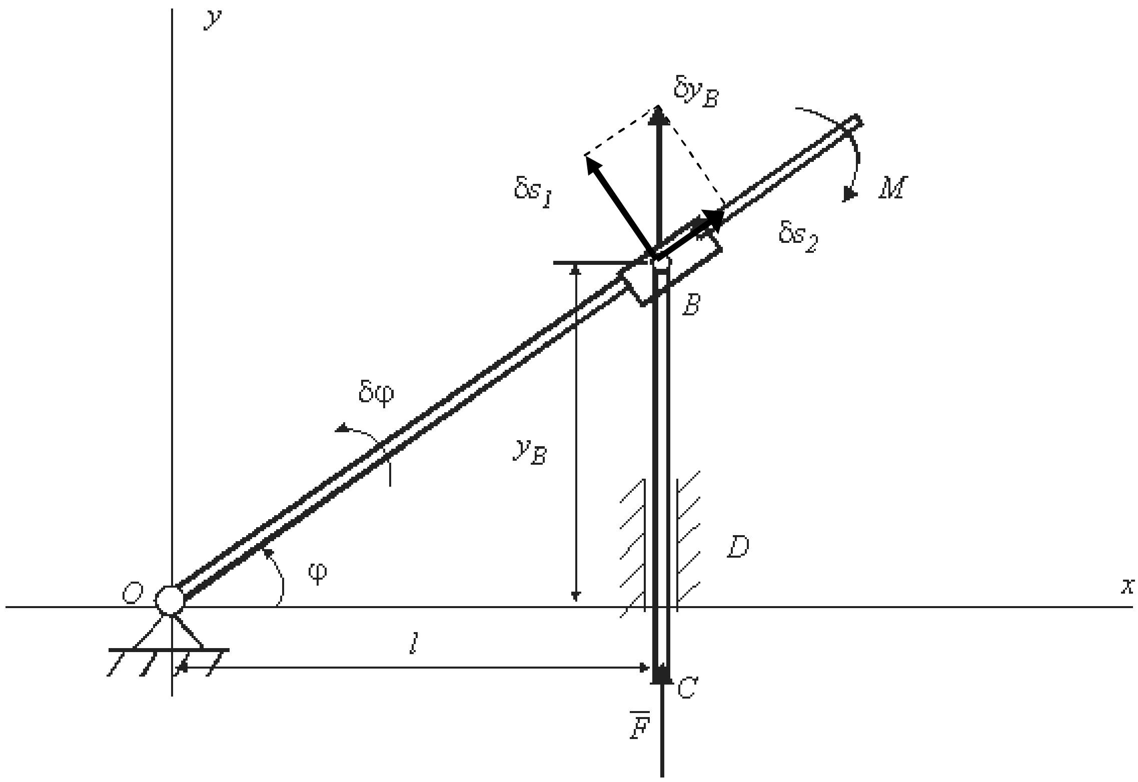


Рисунок 10

В'язі в механізмі стаціонарні й незвільняючі. Вони не мають тертя, а тому ідеальні. Застосуємо до механізму принцип можливих переміщень:

$$\sum_{k=1}^{N} \overline{F}_k \cdot d\ r_k = 0 .$$

Активними силами є пара сил з моментом M і сила $\overline{F}$. Надамо системі можливого переміщення, повернувши подумки стрижень OA на елементарний кут dj у бік зростання кута j. Тоді, відповідно до принципу можливих переміщень,

$$-M\,d\,j + F\,d\,y_c = 0, \tag{а}$$

де $d\,y_c$ – можливе переміщення точки C. Стрижень BC твердий, тому переміщення його кінців B і C рівні, тобто $d\,y_c = d\,y_в$.

У механізмі тільки один ступінь вільності, отже dj і $d\,y_в$ залежать одне від одного. Установимо попередньо залежність $y_в$ від j. Маємо $y_в = l\,tgj$. Шляхом варіювання цього рівняння зв'язку, аналогічного обчисленню повного диференціала від обох частин рівняння, одержимо:

$$d\;y_в = l\frac{1}{\cos^2 j}dj\;. \tag{б}$$

Підставляючи отримане значення $d\;y_в$ в рівняння (а) і виносячи dj за дужки, маємо:

$$dj\;(-M + \frac{Fl}{\cos^2 j}) = 0.$$

Величину dj обирали такою, що не дорівнює нулю, а тому дорівнює нулю вираз у дужках, тобто:

$$-M + \frac{Fl}{\cos^2 j} = 0;\text{ звідки } F = M\,\cos^2\frac{j}{l}.$$

Додатково встановимо залежність між dj і $d\;y_в$ безпосередньо, не використовуючи процес варіювання рівняння в'язі. При повороті стрижня OA на кут dj точка B переміститься разом з відповідною точкою стрижня перпендикулярно стрижню на $d\,s_1 = OBd j$, і крім того, повзун *B* пересунеться вздовж стрижня на $d\,s_2$, для того, щоб точка *B* перемістилася тільки по вертикалі на $d\,y_в$, тому що інші напрямки переміщення точки *B* не дозволяються вертикальними напрямними стрижня *BC*. Вектор можливого переміщення точки *B* зобразиться діагоналлю прямокутника, побудованого на складових переміщеннях. Із прямокутника для його діагоналі маємо:

$$d\,y_в = \frac{d\,s_1}{\cos j},\ \text{або}\ d\,y_в = \frac{OB}{\cos j} d\,j = \frac{l}{\cos^2 j} d\,j\ ,\ \text{тому що}\ OB = \frac{l}{\cos j}\ .$$

Як бачимо, $d\,y_в$ повністю відповідає попередньому значенню (б).

Приклад 2. *Стрижнева система (рис. 11) розташована у вертикальній площині, перебуває в рівновазі під дією двох пар сил з моментами* M_1 *і* M_2. *Стрижні AC і BD паралельні. Стрижень BC довжиною l становить із стрижнем BD кут* a .

Нехтуючи силами ваги стрижнів і тертям у шарнірах, визначити реакції в кріпленні A і зусилля в стрижні BD.

Розв’язання

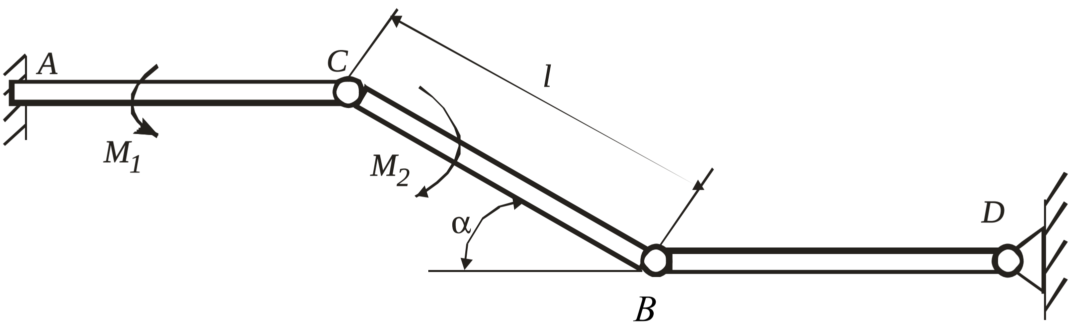


Рисунок 11

Звільнимо систему стрижнів від жорсткого закріплення, приклавши сили $\overline{X}_A, \overline{Y}_A$ і момент у закріпленні M_A (рис. 12). В’язі, що залишилися, є ідеальними, якщо в них не виникає сил тертя.

Дамо стрижню *AC* можливе переміщення $d\,s$, що допускають в'язі, які залишилися, у напрямку осі *Ax*. Точка *B* може мати переміщення $d\,s_в$, тільки перпендикулярне *BD*. Для можливих переміщень точок твердого тіла, аналогічно миттєвому центру швидкостей при плоскому русі, можна побудувати миттєвий центр переміщень. Для встановлення зв'язку між можливими переміщеннями точок твердого тіла можна використати й інші положення про зв'язок швидкостей точок твердого тіла при плоскому русі і в інших випадках руху.

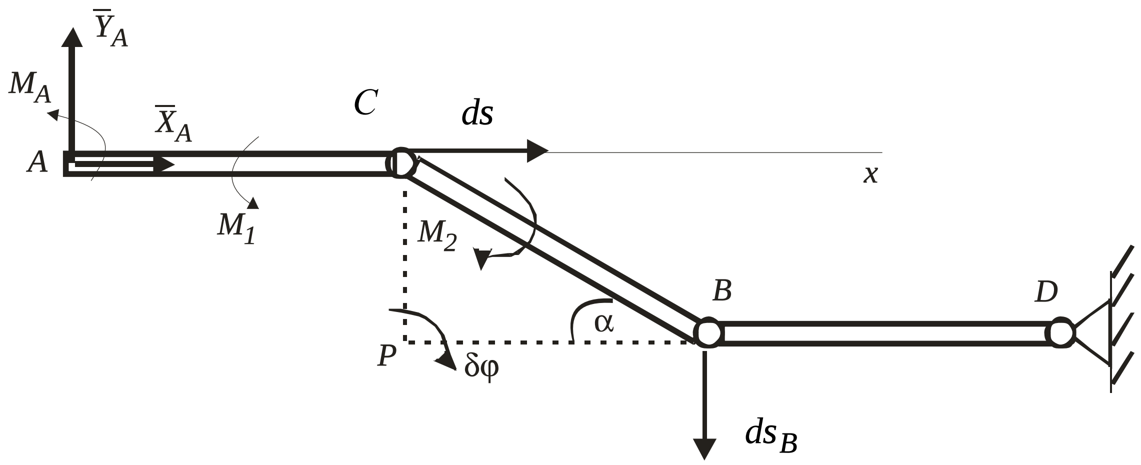


Рисунок 12

Миттєвий центр переміщень *P* стрижня *BC* буде на перетині перпендикулярів до можливих переміщень точок *B* і *C*. Навколо *P* стрижень *BC* повернеться на кут $d\,j$, що визначається відношенням переміщення $d\,s$ до відстані *CP*, тобто

$$d\,j = \frac{d\,s}{CP} = \frac{d\,s}{l \sin a}. \qquad (в)$$

Із принципу можливих переміщень маємо:

$$X_A d\,s + M_2 d\,j = 0. \qquad (г)$$

Моменти пари сил M_2 і кут $d\,j_2$ мають однакові напрямки –

за годинниковою стрілкою, тому елементарна робота пари сил є додатною. Підставляючи (в) в (г), одержуємо:

$$X_A = -\frac{M_2}{l \sin a}.$$

Для визначення M_A дамо системі можливе переміщення, повернувши стрижень AC навколо точки A на кут $d\,j_1$ (рис.13). Із принципу можливих переміщень у цьому випадку маємо:

$$M_A d\,j_1 + M_1 d\,j_1 = 0, \text{ отже } M_A = M_1.$$

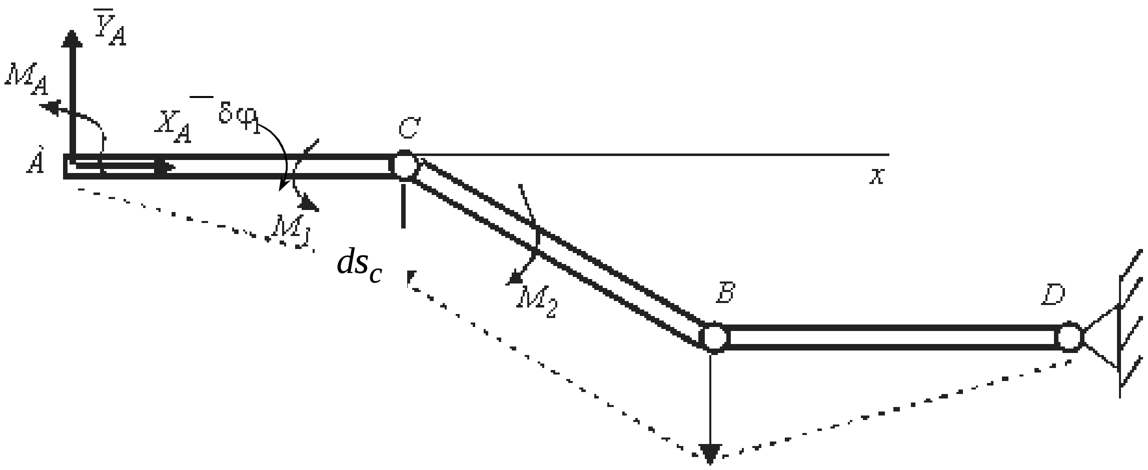


Рисунок 13

Щоб визначити $\overline{Y}_A$ (рис.14) дамо стрижню AC можливе переміщення, повернувши його на кут $d\,j_2$ навколо точки C. Одержимо:

$$M_1 d\,j_2 - Y_A l_1 d j_2 + M_A d j_2 = 0.$$

Так як $M_A = M_1$, то $Y_A = 0$.

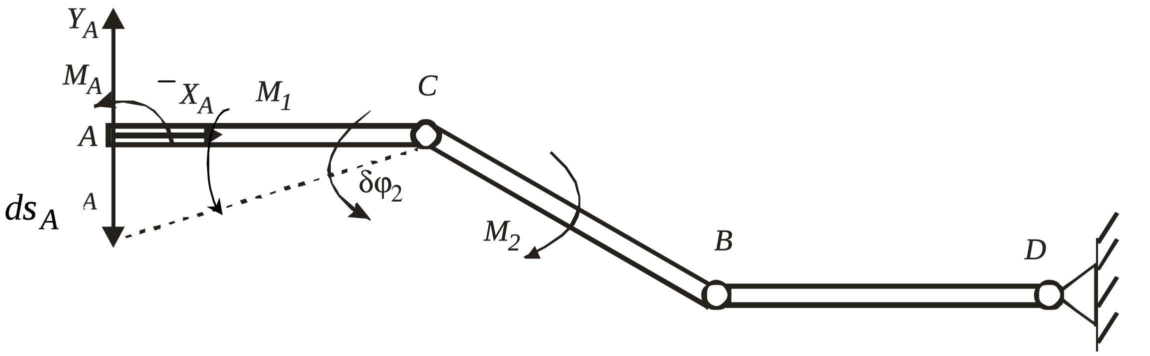


Рисунок 14

Для визначення зусилля в стрижні *BD* відкинемо цей стрижень, замінивши його дію силою $\bar{S}$, спрямованої вздовж стрижня, зберігши жорстке закріплення (рис.15).

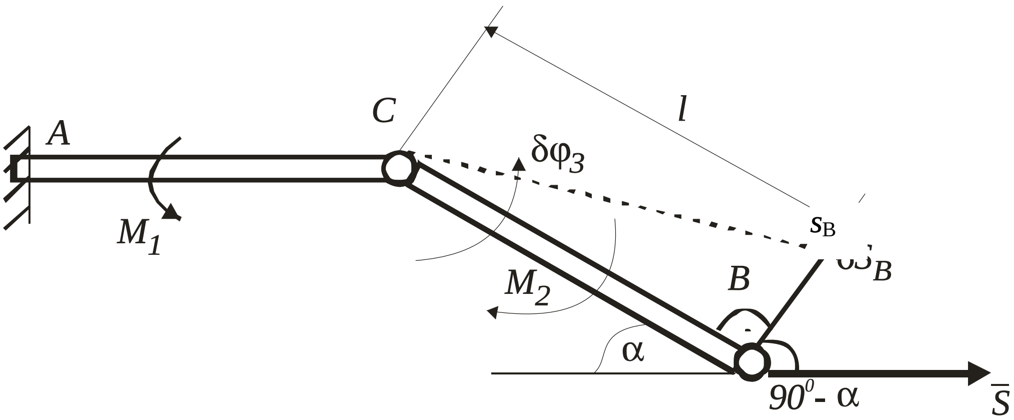


Рисунок 15

У цьому випадку в'язі допускають поворот стрижня *BC* на кут dj_3. Точка *B* при цьому переміститься на $d\,s_B$. Проекція переміщення на напрямок сили $\bar{S}$ при цьому дорівнює $d\,s_B \sin a = l dj_3 \sin a$. Знайдемо суму елементарних робіт на можливому переміщенні і дорівняємо її до нуля. Відповідно до принципу можливих переміщень отримаємо:

$$-M_2 dj_3 + Sd\,s_B \sin a = 0, \text{ або } -M_2 dj_3 + S \cdot l \cdot dj_3 \sin a = 0,$$

звідки одержуємо: $$S = \frac{M_2}{l \sin a}.$$

Приклад 3. *Горизонтальна балка AD складена з двох балок AC і CD, шарнірно з'єднаних у точці С. Кінець D балки CD жорстко прикріплений до вертикальної стіни (рис.16).*

Визначити момент реакції жорсткого закріплення, якщо на балку діють рівні вертикальні сили $\overline{F}_1 = \overline{F}_2 = \overline{F}_3$, а також момент М пари сил. Розміри вказані на рисунку 16. Силами ваги балок знехтувати.

Розв'язання

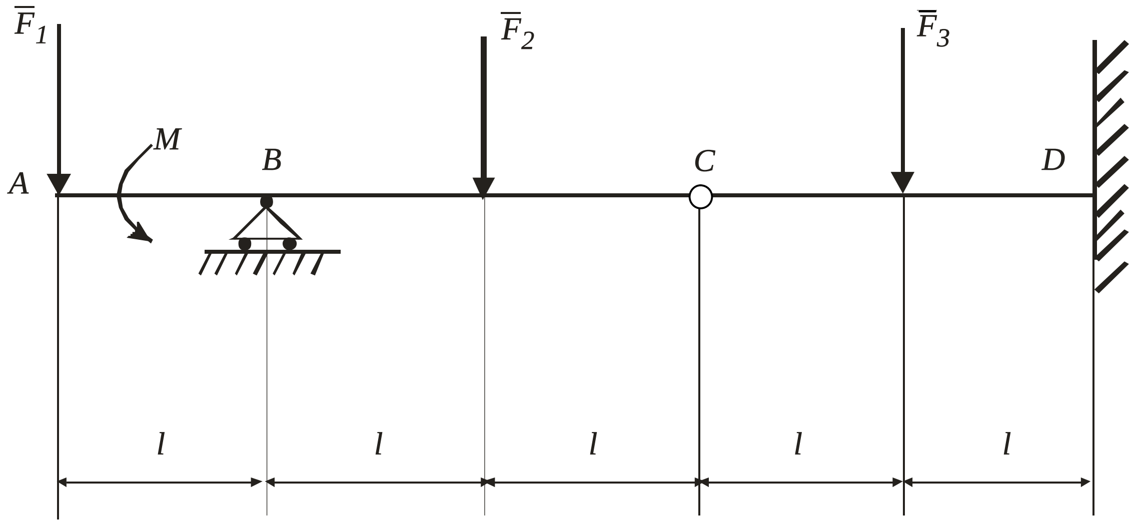


Рисунок 16

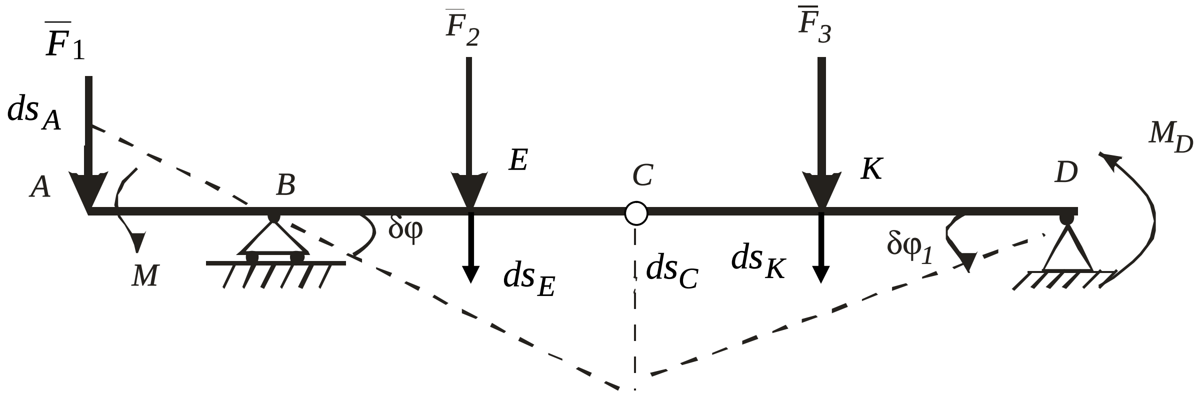


Рисунок 17

Замінимо жорстке закріплення в точці D для плоскої системи прикладених сил плоским шарніром і моментом жорсткого закріплення

M_D (рис. 17). Інші в'язі є ідеальними, якщо знехтувати тертям у шарнірах і катковій опорі. Вони стаціонарні й незвільнюючі. Прикладеними силами являються $\overline{F}_1 = \overline{F}_2 = \overline{F}_3$ і пари сил з моментами M і M_D. Надамо системі можливого переміщення, надавши їй обертання на елементарний кут dj навколо точки B. В'язі допускають таке переміщення. Складена балка займе стан, показаний на рисунку 17 пунктиром. Коткова опора при цьому зміщується в горизонтальному напрямку, але прикладені сили не здійснюють роботи на горизонтальних переміщеннях.

Відповідно до принципу можливих переміщень:

$$- F_1 ds_A - M dj + F_2 ds_E + F_3 ds_k + M_D dj_1 = 0 .$$

Можливі переміщення слід брати як прямолінійні відрізки, спрямовані за дотичними до дуг кіл, тобто за лінією дії сил.

У складеній балці тільки один ступінь вільності, і тому вона має одне довільне можливе переміщення, наприклад, dj. Для останніх можливих переміщень маємо: $ds_A = l dj$; $ds_E = l dj$; $ds_K = l dj_1$. Можливе переміщення точки C виражається через кути dj і dj_1: $ds_c = 2l dj = 2l dj_1$, тому $dj_1 = dj$. Підставивши отримані значення можливих переміщень у рівняння і враховуючи, що $F_1 = F_2 = F_3 = F$, отримаємо:

$$dj \left(- Fl - M + Fl + M_D\right) = 0,$$

звідки $$-M + Fl + M_D = 0 ;$$

тоді $$M_D = M = Fl .$$

Приклад 4. *Кривошипно-шатунний механізм, зображений на рисунку 18, знаходиться у рівновазі під дією сили* $\overline{Q}$, *яка прикладена до повзуна B і пари сил з моментом M.*

Знайти умови рівноваги механізму, якщо кут кривошипа OA відносно горизонталі дорівнює j, *кут при шарнірі A є прямим. Довжину кривошипа й шатуна взяти OA і AB відповідно.*

Розв’язання

Відповідно до принципу можливих переміщень (10) рисунка 18 маємо:

$$Qd\,s_B - Mdj = 0, \qquad \text{(a)}$$

де $d\,s_B$ – можливе переміщення повзуна *B*;

dj – можливе переміщення кривошипа *OA*.

Виразимо елементарні переміщення одне через друге, використовуючи теорему про проекції швидкостей точок на пряму, яка з’єднує ці точки.

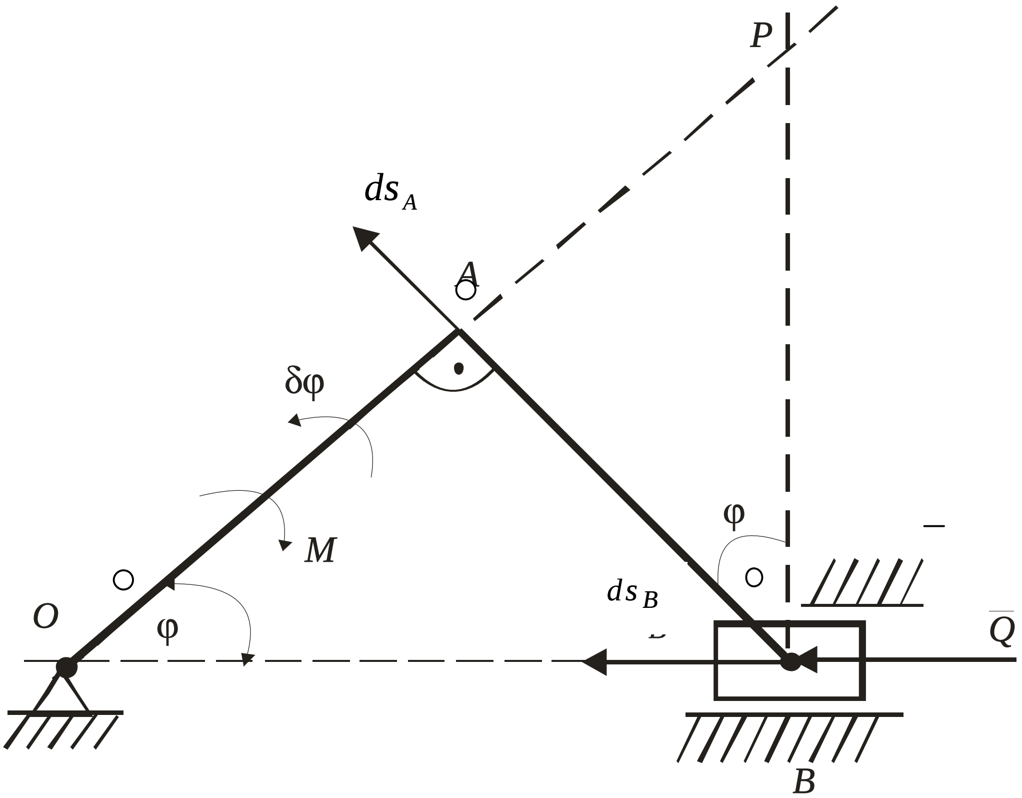


Рисунок 18

Врахуємо також, що переміщення точок пропорційні їх швидкостям. Тоді

$d\,s_B \sin j = d\,s_A$, але $d\,s_A = OA \cdot dj$, тоді: $d\,s_B \sin j = OA \cdot dj$, звідки

$$d\,s_B = \frac{OA}{\sin j} d j \ .$$

Підставляємо це значення в рівняння (а):

$$Q\frac{OA}{\sin j} d j - M\,d j = 0, \text{ або остаточно: } M = \frac{OA}{\sin j} Q.$$

Взаємозв'язок між $d\,s_B$ і $d j$ можливо також знайти за допомогою миттєвого центра P швидкостей (рис.18). Запишемо відповідні рівняння:

$$\frac{d\,s_B}{BP} = \frac{d\,s_A}{AP},$$

звідки

$$d\,s_B = d\,s_A \frac{BP}{AP}, \text{ але } d\,s_A = OA \cdot d j \ ,$$

а $\frac{BP}{AP} = \frac{1}{\sin j}$ (із ΔAPB), тоді $d\,s_B = \frac{OA}{\sin j} d j$, як і було отримано в попередньому випадку.

Приклад 5. *Визначити залежності між* $\overline{P}$ *і* $\overline{Q}$ *в клиновому пресі (рис.19), якщо сила* $\overline{P}$ *прикладена до кінця рукоятки довжиною* l *перпендикулярно до осі гвинта і рукоятки. Крок гвинта дорівнює* h*, кут при вершині А клина дорівнює* a .

Розв'язання

Позначимо на рисунку 3.19 всі можливі переміщення точок і тіл механічної системи, яка розглядається. Врахуємо при цьому, що система має один ступінь вільності, тобто всі переміщення взаємозалежні.

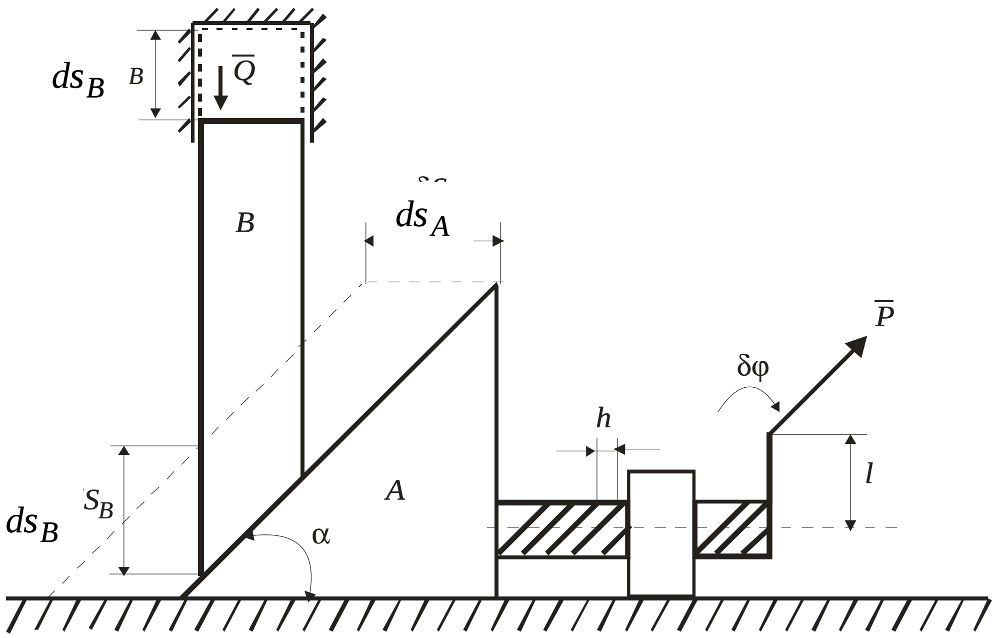


Рисунок 19

Згідно з (10) принципом можливих переміщень і відповідно до рисунка 19, отримаємо:

$$\sum d\,A_k = 0, \text{ або } P \cdot l \cdot dj\; - Qd\,s_B = 0. \qquad \text{(а)}$$

Якщо рукоятка здійснить повний оберт, тобто обернеться на кут $2p$ рад., то клин *A* зміститься на шаг гвинта h. Оберт рукоятки на кут dj призведе до зміщення клина на $d\,s_A$. Таким чином, складається така пропорція:

$$\left.\begin{aligned} 2p\; &- h; \\ dj\; &- d_A. \end{aligned}\right\}$$

Звідси

$$d_A = \frac{h}{2p} dj\;. \qquad \text{(б)}$$

З рисунка 19 отримаємо:

$$\frac{d\,s_B}{d\,s_A} tga\;, \qquad \text{(в)}$$

із рівнянь (в) і (б) випливає

$$d\, s_B = \frac{htga}{2p} dj \ .$$

Підставляємо значення $d\, s_B$ до рівняння (а):

$$Pldj \ - Q\frac{htga}{2p}dj \ = 0, \text{ звідки: } Q = Pl\frac{2p}{htga} .$$

5.3 Приклади завдань для самоперевірки знань

Варіант 1

1 Записати та сформулювати принцип Даламбера для матеріальної точки.
2 Викласти формулу для визначення головного моменту сил інерції системи (друге слідство принципу Даламбера).
3 Сформулювати поняття “можливе переміщення точки”.
4 Сформулювати поняття геометричної та кінематичної в’язей.
5 Чому гладенька поверхня являється ідеальною в’язю? Зобразити схему.

Варіант 2

1 Записати та сформулювати принцип можливих переміщень.
2 Викласти формулу для визначення головного вектора сил інерції системи (перше слідство принципу Даламбера).
3 Сформулювати умову ідеальності в’язей.
4 Сформулювати поняття “голономна” та “неголономна” в’язі.
5 Яка в’язь називається стаціонарною?

Варіант 3

1 Записати та сформулювати принцип Даламбера для системи.
2 Отримати та сформулювати третє слідство із принципу Даламбера (про суму робіт сил інерції).
3 Дати визначення звільняючої та не звільняючої в'язей.
4 Чим можливе переміщення відрізняється від реального?
5 Чому невагома нитка є ідеальною в'яззю? Зобразити схему.

6 УЗАГАЛЬНЕНІ КООРДИНАТИ, ШВИДКОСТІ І ПРИСКОРЕННЯ

Нехай система складається з N точок, і, отже, її положення в просторі в кожен момент часу визначається $3N$ координатами точок системи, наприклад, декартовими x_k, y_k, z_k. Припустимо, що на систему накладені голономні в'язі, рівняння яких у загальному випадку можуть містити і похідні від координат точок, але після їхнього інтегрування вони звелися до геометричних в'язей і мають форму:

$$f_s(x_k, y_k, z_k) = 0; \quad s = 1, 2, \ldots, l. \tag{14}$$

Звільняючі в'язі, що виражаються нерівностями, не розглядаються. Таким чином, $3N$ координат зв'язані l рівняннями, і незалежних координат буде $n = 3N - l$.

Будь-які n декартових координат можна задати незалежно одну від одної. Усі інші координати визначаються з рівнянь в'язей. Замість n незалежних декартових координат можна вибрати будь-які інші незалежні параметри $q_1, q_2, \ldots, q_n$, що залежать від усіх або частини декартових координат точок системи.

Незалежні параметри, що визначають положення системи у просторі, називаються ***узагальненими координатами системи****.*

У загальному випадку вони можуть залежати від усіх декартових координат точок системи, тобто

$$q_1 = q_1(x_k, y_k, z_k), \tag{15}$$

де k – змінюється від *1* до *N*.

Задані узагальнені координати повністю визначають положення точок системи щодо обраної системи відліку, наприклад, декартових осей координат.

У вільної точки три узагальнені координати. Якщо точка повинна рухатися за заданою поверхнею, то узагальнених координат тільки дві, і т.д. Використовуючи рівняння в'язей (14) і вираз узагальнених координат через декартові (15), можна при виконанні умов можливості розв'язання цієї системи рівнянь виразити декартові координати через узагальнені, тобто одержати наступні залежності:

$$x_k = x_k(q_1, q_2, \mathbf{K}, q_n, t);\ y_k = y_k(q_1, q_2, \mathbf{K}, q_n, t);\ z_k = z_k(q_1, q_2, \mathbf{K}, q_n, t).$$

Відповідно, для радіуса-вектора кожної точки системи

$$\bar{r}_k = x_k \bar{i} + y_k \bar{j} + z_k \bar{k}$$

одержимо залежність

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \mathbf{K}, q_n, t). \tag{16}$$

У випадку стаціонарних в'язей час явно не входить до рівняння в'язей.

Тому і до рівняння (16) він увійде тільки неявно, через узагальнені координати, якщо система рухається. Для голономних систем вектор можливого переміщення точки $d\,\bar{r}_k$, у відповідності до рівнянь (16), можна виразити у формі

$$d\,\bar{r}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} d\,q_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2} d\,q_2 + \mathbf{K} + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_n} d\,q_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} d\,q_i\,. \tag{17}$$

Система, що має n незалежних узагальнених координат, характеризується також n незалежними можливими переміщеннями або варіаціями, $d\,q_1, d\,q_2, \mathbf{K}, dq_n$, якщо в'язі голономні. Для голономних систем кількість незалежних можливих переміщень збігається із кількістю незалежних узагальнених координат. Отже, **число степенів вільності голономної системи дорівнює числу незалежних узагальнених координат цієї системи, тобто $n = 3N - l$.**

Для неголономних систем до рівняння в'язей (14) можуть входити похідні від декартових координат точок, і навіть можуть бути такі рівняння в'язей, до яких входять тільки одні похідні. Такі рівняння в'язей накладуть обмеження на варіації $d\,q_1, d\,q_2, \mathbf{K}, dq_n$, і отже, зменшать число незалежних варіацій, не зв'язуючи функціональною залежністю самі узагальнені координати $d\,q_1, d\,q_2, \mathbf{K}, dq_n$. Для неголономних систем у загальному випадку число незалежних варіацій (можливих переміщень) менше числа узагальнених координат. Число степенів вільності неголономної системи, рівне кількості незалежних можливих переміщень, теж менше узагальнених координат системи.

Надалі будемо розглядати тільки голономні системи, тобто системи з голономними в'язями. Узагальнені координати можна розглянути на прикладі простого механізму (рис.20).

Нехай маємо кривошипно-шатунний механізм (рис. 20). Його положення на площині цілком визначається завданням положення трьох його точок *O*, *A* і *B* з координатами, відповідно, (0,0), $(x_A, y_A), (x_B, 0)$. Координат, які не дорівнюють нулю, тільки три, тобто 3N=3. Можна скласти два рівняння в'язей, з огляду на сталість довжин *OA*=r і *AB*=*l*.

Маємо:

$$x_A^2 + y_A^2 = r^2; (x_B - x_A)^2 + y_A^2 = l^2. \qquad \text{(a)}$$

Число степенів вільності $n = 3N - l$ = *3-2=1*.

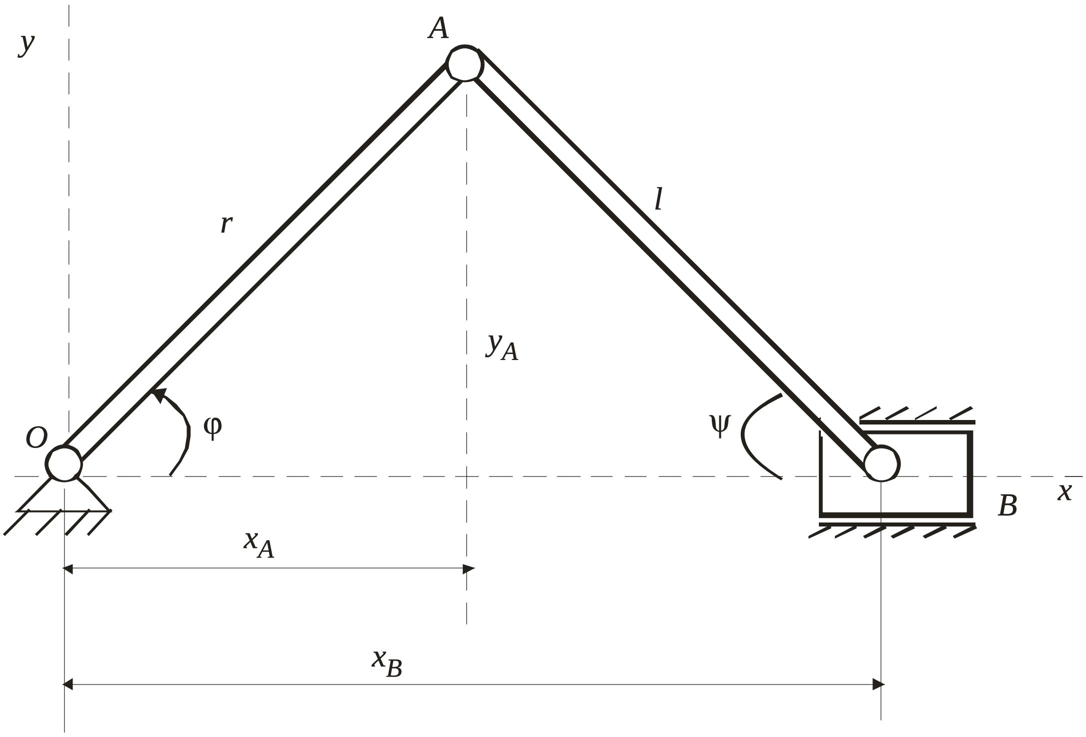


Рисунок 20

Із трьох координат, які не дорівнюють нулю, тільки одну можна задати незалежно. Дві інші можна виразити через неї як рішення рівнянь в'язей. Як незалежну координату можна обрати кожну із трьох координат $x_A, y_A,\ x_B$ або будь-яку комбінацію цих координат. Потрібно тільки, щоб вона однозначно визначала положення механізму щодо осей координат *Oxy*. Координати x_A і x_B варто виключити. Вони неоднозначно визначають положення механізму. Зручно за незалежну узагальнену координату q обрати кут j, тобто

$$q = j = arctg\frac{y_A}{x_A}. \tag{б}$$

З рівнянь (а) і (б) координати $x_A, y_A,\ x_B$ можна виразити через кут j. Для цього треба вирішити цю систему рівнянь щодо координат. Але зручніше, не вирішуючи системи рівнянь, виразити координати через кут j, використовуючи рис.20. Одержимо:

$$x_A = r\cos j; \quad y_A = r\sin j; \quad x_B = r\cos j + l\cos j.$$

При цьому:

$$y_A = r\sin\varphi = l\sin\psi\,; \quad \sin\psi = \frac{r}{l}\sin\varphi\,; \quad \cos\psi = \sqrt{1-\sin^2\psi} = \frac{1}{l}\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}\ .$$

З урахуванням цього шукані вирази для координат набувають форми:

$$x_A = r\cos\varphi\,; \quad y_A = r\sin\varphi\,; \quad x_B = r\cos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}\ .$$

Неважко перевірити, що ці значення декартових координат задовольняють системі рівнянь (а) і (б).

За аналогією зі звичайними поняттями швидкості і прискорення введемо поняття узагальненої швидкості й узагальненого прискорення.

Узагальненою швидкістю називають першу похідну за часом від узагальненої координати:

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}, \quad i = 1,2,3,\ldots,n. \tag{18}$$

А узагальненим прискоренням називають другу похідну від узагальненої координати за часом:

$$\ddot{q}_i = \frac{d^2 q_i}{dt^2}\,. \tag{19}$$

Фізичний зміст $\dot{q}_i$ і $\ddot{q}_i$ легко встановити на конкретних прикладах.

Якщо узагальнена координата q – деяка лінійна відстань, то $\dot{q}_i$ і $\ddot{q}_i$ – лінійна швидкість і лінійне прискорення відповідно.

Якщо q – кут повороту, то $\dot{q}_i$ і $\ddot{q}_i$ – відповідно кутова швидкість і кутове прискорення.

Якщо q – площина то $\dot{q}_i$ і $\ddot{q}_i$ – секторна швидкість і секторне прискорення.

Встановимо зв'язок між вектором $\overline{V}_k$ швидкості k–ї матеріальної точки та узагальненими швидкостями $\dot{q}_i$. Для цього зазначимо, що оскільки положення точок системи можна одночасно задати їхніми радіусами-векторами, то очевидно, існують співвідношення (16):

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k\left(t,\, q_1, q_2, \ldots q_n\right).$$

Диференціюючи цю рівність за часом, отримаємо:

$$\overline{V}_k = \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t};\; i = 1,2,\ldots,n;\; k = 1,2,\ldots,N\,. \tag{20}$$

Звідси видно, що швидкості $\overline{V}_k$ точок систем через узагальнені швидкості виражаються лінійно.

7 УЗАГАЛЬНЕНІ СИЛИ

7.1 Визначення узагальнених сил

Розглянемо систему N матеріальних точок (механічну систему), на яку діють активні сили $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_N$, що прикладені в точках, можливі переміщення яких $d\,\bar{r}_1, d\,\bar{r}_2, \ldots, d\,\bar{r}_N$. Обчислимо елементарну роботу цієї системи сил, що діють на точки системи, на зазначених можливих переміщеннях системи:

$$dA = \sum_{k=1}^{N} \overline{F}_k \cdot d\,\bar{r}_k\,. \tag{21}$$

Нехай голономна система має n ступенів вільності і її положення в просторі визначається n узагальненими координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Тоді для $d\,\bar{r}_k$, відповідно до рівняння (17), маємо

$$d\,\bar{r}_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} d\,q_i .$$

Підставляючи значення $d\,\bar{r}_k$ в (21) і змінюючи порядок додавання за індексами k та i, одержимо:

$$dA = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) d\,q_i = \sum_{i=1}^{n} Q_i \cdot d\,q_i \ , \tag{22}$$

де скалярна величина $Q_i = \sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}$ називається *узагальненою силою*, віднесеною до узагальненої координати q_i.

Узагальнені сили є коефіцієнтами при варіаціях у виразі елементарної роботи сил, що діють на матеріальну систему.

Використовуючи відомий вираз для скалярного добутку двох векторів, узагальнену силу можна також представити у вигляді:

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{N} \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right), \tag{23}$$

де F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекції сили на осі координат; x_k, y_k, z_k – координати точки прикладення сили $\bar{F}_k$.

Розмірність узагальненої сили, відповідно до (22) залежить від розмірності $d\,q_1$, що співпадає з розмірністю q_i.

$$[Q_i] = \frac{[dA]}{[d\,q_i]} = \frac{[A]}{[q_i]}, \tag{24}$$

тобто, розмірність узагальненої сили дорівнює розмірності роботи сили (енергії) або моменту сили, поділеної на розмірність узагальненої координати, до якої віднесена узагальнена сила. Якщо $[q_1]$ – довжина, то

$$[Q_i] = \frac{робота}{довжина} = \frac{сила \times довжина}{довжина} = сила,$$

тобто узагальнена сила має розмірність сили. У тому випадку, коли $[q_i]$=1, (наприклад, 1 радіан), якщо за узагальнену координату обрано кут, $[Q_i]$ – момент сили.

7.2 Обчислення узагальнених сил

Існують декілька способів обчислення узагальнених сил.

1 Узагальнену силу можна обчислити за формулою (23), що визначає цю силу, тобто

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N} \overline{F}_k \cdot \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{N} \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right).$$

2 Узагальнені сили можна обчислювати як коефіцієнти при відповідних варіаціях узагальнених координат у виразі для елементарної роботи (22), тобто

$$\sum_{k=1}^{N} \overline{F}_k \cdot d\overline{r}_k = \sum_{i=1}^{n} Q_i d q_i = Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2 + ... + Q_n dq_n. \qquad (25)$$

3 Найбільш доцільний спосіб обчислення узагальнених сил, що виходить із рівняння (25), полягає у тому, щоб надати таке можливе переміщення, при якому зміниться тільки одна узагальнена координата, а інші при цьому не змінюються. Так, якщо $dq_1 \neq 0$, а інші $dq_2 = dq_3 = dq_n = 0$, то з рівняння (25) отримаємо:

$$Q_1 = \frac{\left(\sum_{k=1}^{N} \overline{F}_k \cdot d\overline{r}_k \right)_{q_1}}{dq_1}.$$

Індекс q_1 указує, що сума елементарних робіт обчислюється на можливому переміщенні, при якому змінюється (варіюється) тільки координата q_1. Якщо координатою, що змінюється, є q_i, то

$$Q_i = \frac{\left(\sum_{k=1}^{N} \overline{F}_k \cdot d\overline{r}_k \right)_{q_i}}{dq_i}. \tag{26}$$

4 Для потенціальних сил за їх визначенням маємо:

$$F_{kx} = \partial U / \partial x_k ; \quad F_{ky} = \partial U / \partial y_k ; \qquad F_{kz} = \partial U / \partial z_k , \tag{27}$$

де U _ силова функція, що залежить від координат точок системи і через них – від узагальнених координат, тобто

$$U = U(x_k, y_k, z_k) = U(q_1, q_2 ..., q_n) . \tag{28}$$

У випадку нестаціонарних силових полів, які далі не розглядаються, силова функція може ще явно залежить від часу.

Для узагальненої сили, відповідно до її визначення, з урахуванням рівнянь (27) і (28), маємо:

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N} \overline{F}_k \cdot \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{N} (F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F \frac{\partial z_k}{\partial q_i}) =$$
$$= \sum_{k=1}^{N} (\frac{\partial U}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial z_k} \frac{\partial z_k}{\partial q_i}) = \frac{\partial U}{\partial q_i}.$$

Таким чином, у випадку існування силової функції

$$Q_i = \partial U / \partial q_i = -\partial \Pi / \partial q_i , \tag{29}$$

тому що, як зазначалось раніше, потенціальна енергія системи Π

пов’язана із силовою функцією U співвідношенням

$$\Pi = -U + const\,.$$

Отже, узагальнена сила дорівнює частинній похідній від силової функції за відповідною узагальненою координатою.

8 УМОВИ РІВНОВАГИ СИСТЕМИ В УЗАГАЛЬНЕНИХ КООРДИНАТАХ

Умови рівноваги системи виводяться із принципу можливих переміщень. Їх можна застосовувати до систем, для яких цей принцип справедливий. Відповідно до принципу можливих переміщень, умова

$$\sum_{k=1}^{N} \overline{F}_k \cdot d\overline{r}_k = 0$$

є необхідною і достатньою для рівноваги системи. Але, відповідно до рівняння (25)

$$\sum_{k=1}^{N} \overline{F}_k \cdot d\overline{r}_k = \sum_{i=1}^{n} Q_i dq_i = Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2 + \ldots + Q_n dq_n\,.$$

Отже, необхідною і достатньою умовою рівноваги є рівність

$$Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2 + \ldots + Q_n dq_n = 0\,. \tag{30}$$

Так як узагальнені координати незалежні, та їхні варіації $q_1, q_2, \ldots, q_n$ є теж незалежними, довільними, нескінченно малими величинами. Можна прийняти $dq_1 \neq 0$, а всі інші: $dq_2 = dq_3 = dq_n = 0$. Тоді з рівняння (30) одержимо $Q_1 = 0$. Аналогічно, прийнявши $dq_2 \neq 0$,а

$dq_1 = dq_3 = dq_n = 0$,будемо мати $Q_2 = 0$ і т.д. Таким чином, з рівняння (30) одержуємо наступні умови рівноваги системи:

$$Q_1 = 0, Q_2 = 0, \ldots, Q_n = 0, \tag{31}$$

тобто для рівноваги механічної системи, яка підпорядковується голономним, стаціонарним, ідеальним і незвільняючим в’язям, у момент, коли швидкості всіх точок системи дорівнюють нулю, необхідно й достатньо, щоб всі узагальнені сили дорівнювали нулю.

Про голономність в’язей умовилися при введені узагальнених координат і узагальнених сил, а також при визначенні числа степенів вільності. Інші умови для в’язей входять до формулювання самого принципу можливих переміщень.

У статиці для рівноваги вільного твердого тіла, що має шість степенів вільності, було отримано шість умов рівноваги для прикладених до тіла сил. Ці умови можна одержати також, дорівнявши нулю кожну із шести узагальнених сил. Для цього варто обрати за узагальнені координати декартові координати *x*, *y*, *z* якої-небудь точки тіла і кути повороту тіла навколо осей координат, що проходять через цю точку. Узагальнені сили, віднесені до координат *x*, *y*, *z*, перетворяться, відповідно, на суми проекції прикладених сил на ці осі, а узагальнені сили, віднесені до кутів повороту навколо осей координат, – на суми моментів сил щодо цих осей.

Умови рівноваги (31) для системи, що перебуває під дією потенціальних сил, разом з рівнянням (29) дадуть наступні умови для силової функції:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \partial U / \partial q_1 = 0, \\ Q_2 &= \partial U / \partial q_2 = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_n &= \partial U / \partial q_n = 0, \end{aligned} \tag{32}$$

тобто, всі частинні похідні від силової функції за узагальненими координатами дорівнюють нулю. Це є необхідною умовою існування екстремуму силової функції. Таким чином, при рівновазі механічної системи, що перебуває під дією потенціальних сил, силова функція і потенційна енергія можуть досягати екстремуму.

Приклад 6. *Диференціальний планетарний механізм складається із двох шестірень радіусами* r_1 *і* r_2 *і кривошипу ОА (рис.21). До кривошипа прикладена пара сил з моментом* M *, а до шестірень 1 і 2 – пари сил з моментами* M_1 *і* M_2*. Механізм розташований у горизонтальній площині. Визначити моменти пар сил* M *і* M_1*, які необхідно прикласти до шестірні 1 і кривошипу ОА для рівноваги механізму. Тертям у шарнірах знехтувати.*

Розв'язання

В'язі системи, які утворюють тверді тіла й рухомий (точка *A*) і нерухомий (точка *O*) шарніри без тертя, є ідеальними, голономними, стаціонарними і незвільняючими. Система має два ступені вільності. Дійсно, можна закріпити шестірню 1, тоді кривошип *OA* й шестерня 2 збережуть можливість цілком певного руху. Якщо додатково закріпити ще й кривошип *OA*, то рух будь-яких ланок механізму вже неможливий.

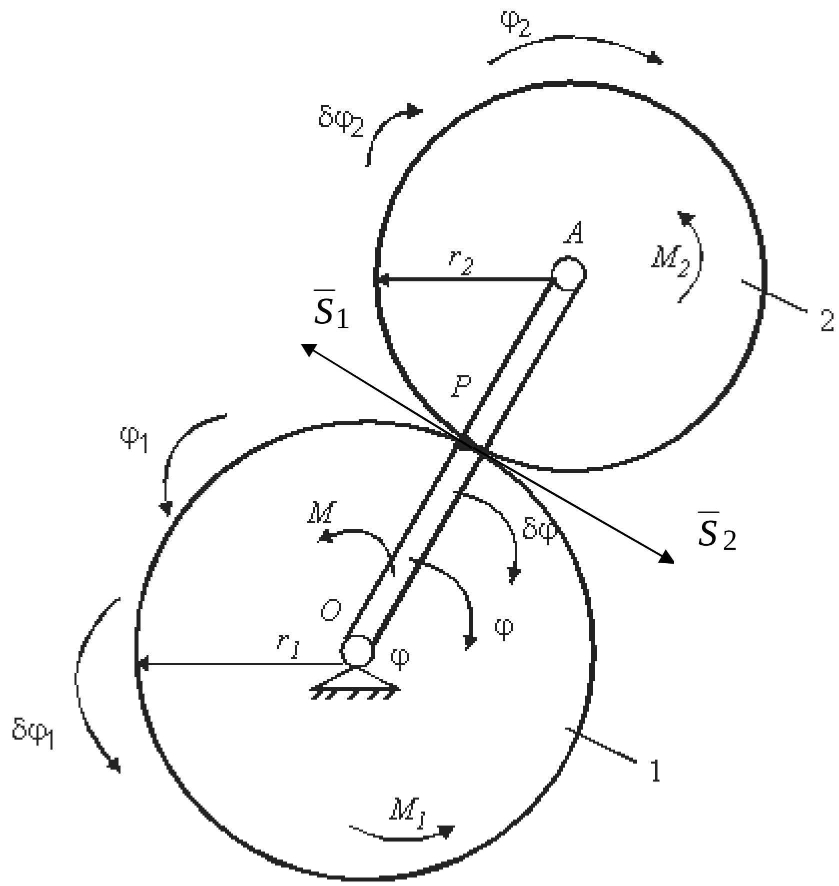


Рисунок 21

Оберемо за узагальнені координати кути повороту шестерні 1 і кривошипа *OA*, які відлічуються від будь-яких фіксованих положень цих тіл. За умовами рівноваги системи, узагальнені сили, віднесені до цих координат, дорівнюють нулю, тобто $Q_{j_1} = 0; Q_j = 0$. Обчислимо узагальнені сили за формулами:

$$Q_{j_1} = \frac{\left(\sum_{k=1}^{N} \overline{F}_k \cdot d\overline{r}_k \right)_{j_1}}{dj_1}; \quad Q_j = \frac{\left(\sum_{k=1}^{N} \overline{F}_k \cdot d\overline{r}_k \right)_{j}}{dj}. \tag{а}$$

Індекси вказують, що суми елементарних робіт повинні обчислюватися при зміні тієї узагальненої координати, що зазначена в індексі. Інша узагальнена координата при цьому не повинна змінюватися.

До активних сил варто віднести пари сил з моментами M, M_1, M_2 сили ваги шестерень і кривошипа і внутрішні сили $\overline{S}_1$ і $\overline{S}_2$ дії шестерень одна на одну в точці *P*. Ці сили, як сили дії й протидії, задовольняють умові $\overline{S}_1 = -\overline{S}_2$.

Так як механізм розташований у горизонтальній площині, то елементарні роботи сил ваги його ланок дорівнюють нулю. Можливі переміщення точок прикладення цих сил розташовуються в горизонтальній площині, перпендикулярній силам ваги.

Дамо шестерні 1 можливе переміщення $dj_1 \neq 0$, наприклад, в бік зростання кута j_1, прийнявши при цьому $dj = 0$. Маємо:

$$Q_{j_1} = \frac{\left(\sum_{k=1}^{N} \overline{F}_k \cdot d\overline{r}_k \right)_{j_1}}{dj_1} = \frac{M_1 dj_1 - M_2 dj_2^{(1)}}{dj_1}. \tag{б}$$

Елементарна робота пари сил з моментом M_2 від'ємна, тому що M_2 і dj_2 спрямовані в протилежні боки. Сума елементарних робіт $\overline{S}_1$ і $\overline{S}_2$ дорівнює нулю, тому що в них спільна точка прикладання і однакове можливе переміщення, а самі сили рівні за модулем і протилежні за напрямком. При $j = const$ кути повороту шестерень dj_1 і $dj_2^{(1)}$ спрямовані в протилежні боки. Переміщення точки дотику шестерень однакові, отже,

$$r_1 dj_1 = r_2 dj_2^{(1)},\ dj_2^{(1)} = \frac{r_1}{r_2} dj_1 .$$

Підставляючи це значення $dj_2^{(1)}$ в рівняння (б) і скорочуючи на dj_1, одержуємо

$$Q_{j_1} = M_1 - M_2 \frac{r_1}{r_2} . \qquad \text{(в)}$$

Надамо тепер кривошипу *OA* можливе переміщення dj . Наприклад, за напрямком моменту пари сил *M,* вважаючи кут j_1 сталим. Тоді:

$$Q_j = \frac{\left(\sum_{k=1}^{N} \overline{F}_k \cdot d\overline{r}_k \right)_j}{dj_1} = \frac{M_1 dj - M_2 dj_2}{dj} . \qquad \text{(г)}$$

У цьому випадку кут dj_2 і момент M_2 знову протилежні. Точка дотику шестерень P є тепер миттєвим центром швидкостей для шестерні 2. Елементарна робота сил $\overline{S}_1$ і $\overline{S}_2$ у цьому випадку дорівнює нулю для кожної сили. Обчислимо можливе переміщення точки A як кривошипа OA і шестерні 2, що має миттєвий центр швидкостей у точці P. Маємо, відповідно,

$$ds_A = (r_1 + r_2) dj = r_2 dj_2 .$$

Звідси одержуємо

$$dj_2 = \frac{r_1 + r_2}{r_2} dj .$$

Підставляючи це значення в рівняння (г) і скорочуючи на dj, одержуємо:

$$Q_j = M - M_2 \frac{r_1 + r_2}{r_2}. \qquad \text{(д)}$$

За умовами рівноваги системи, $Q_{j_1} = 0$; $Q_j = 0$.

З огляду на рівняння (в) і (д), одержуємо:

$$M_1 - M_2 \frac{r_1}{r_2} = 0,$$

$$M - M_2 \frac{r_1 + r_2}{r_2} = 0,$$

або

$$M_1 = M_2 \frac{r_1}{r_2}, \; M = M_2 \frac{r_1 + r_2}{r_2}.$$

9 ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ДИНАМІКИ

Відповідно до принципу Даламбера, для будь-якої механічної системи активні сили, сили реакцій в'язей разом із силами інерції задовольняють умові рівноваги сил для кожної точки системи, тобто

$$\overline{F}_k + \overline{R}_k + \overline{\Phi}_k = 0; \quad k = 1,2,..., N,$$

де $\overline{F}_k$ – активна сила;

$\overline{R}_k$ – сила реакції в'язей;

$\overline{\Phi}_k$ – сила інерції точки.

Множачи скалярно кожну із цих складових на можливе переміщення точки $d\bar{r}_k$ і додаючи по всіх точках системи, одержимо:

$$\bar{F}_k \cdot d\bar{r}_k + \bar{R}_k \cdot d\bar{r}_k + \bar{\Phi}_k \cdot d\bar{r}_k = 0 .$$

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot d\bar{r}_k + \sum_{k=1}^{N} \bar{R}_k \cdot d\bar{r}_k + \sum_{k=1}^{N} \bar{\Phi}_k \cdot d\bar{r}_k = 0. \qquad (33)$$

Це і є загальне рівняння динаміки для системи з будь-якими в'язями. Звичайно його застосовують і для систем з ідеальними в'язями, для яких виконується умова

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{R}_k \cdot d\bar{r}_k = 0 .$$

У цьому випадку рівняння (33) набуває форми:

$$\sum_{k=1}^{N} (\bar{F}_k + \bar{\Phi}_k) \cdot d\bar{r}_k = 0 ;$$

$$\sum_{k=1}^{N} (\bar{F}_k - m_k \bar{a}_k) \cdot d\bar{r}_k = 0$$

або

$$\sum_{k=1}^{N} (\bar{F}_k - m_k \ddot{\bar{r}}_k) \cdot d\bar{r}_k = 0 \qquad (34)$$

тому що сила інерції через прискорення $\bar{a}_k$ відносно інерціальній системи відліку виражається у формі

$$\bar{\Phi}_k = -m_k \bar{a}_k = -m_k \ddot{\bar{r}}_k ,$$

де $\bar{r}_k$ – радіус-вектор точки.

І нарешті це рівняння може мати вигляд:

$$\sum_{k=1}^{N} dA_k + \sum_{k=1}^{N} dA_k^{\Phi} = 0 . \qquad (35)$$

Таким чином, відповідно до загального рівняння динаміки, у будь-який момент руху системи з ідеальними в'язями сума елементарних робіт всіх активних сил і сил інерції точок системи дорівнює нулю на будь-якому можливому переміщені, яке допускають в'язі. Загальне рівняння динаміки (34, 35) часто називають об'єднаним принципом Даламбера – Лагранжа. Його можна назвати також загальним рівнянням механіки. Воно, у випадку рівноваги системи, коли дорівнює нулю сума всіх сил інерції точок системи, переходить у принцип можливих переміщень статики, тільки поки без доказу його статності для рівноваги системи.

Загальному рівнянню динаміки можна надати інших, еквівалентних форм. Розкриваючи скалярний добуток векторів, його можна виразити у вигляді:

$$\sum_{k=1}^{N}\left[(F_{kx}-\varPhi_{kx})dx_k+\left(F_{ky}-\varPhi_{ky}\right)dy_k+\left(F_{kz}-\varPhi_{kz}\right)dz_k\right]=0\,, \tag{36}$$

де x_k, y_k, z_k – координати k-ї точки системи. З огляду на те, що проекції сил інерції на осі координат через проекції прискорень на ці осі виражаються співвідношеннями:

$$\varPhi_{kx}=-m_k a_{kx}=-m_k\ddot{x}_k;\quad \varPhi_{ky}=-m_k a_{ky}=-m_k\ddot{y}_k;\quad \varPhi_{kz}=-m_k a_{kz}=-m_k\ddot{z}_k\,,$$

загальне рівняння динаміки може мати форму:

$$\sum_{k=1}^{N}\left[(F_{kx}-m_k\ddot{x}_k)dx_k+\left(F_{ky}-m_k\ddot{y}_k\right)dy_k+\left(F_{kz}-m_k\ddot{z}_k\right)dz_k\right]=0\,. \tag{37}$$

У цьому виді його називають загальним рівнянням динаміки в аналітичній формі.

Загальне рівняння динаміки для систем, підпорядкованих голономним, ідеальним, незвільняючим в'язям, подає повну інформацію про рух таких систем, тобто з нього, аналогічно тому, як із принципу можливих переміщень виходили умови рівноваги системи, можна одержати повну систему диференціальних рівнянь. Для виводу цих рівнянь треба використати поняття узагальнених координат і узагальнених сил.

Нехай існує система, яка підпорядкована голономним, ідеальним, незвільняючим в'язям. Припустимо, що вона має n ступенів вільності, і її положення у просторі визначається узагальненими координатами $q_1, q_2, ..., q_n$. Радіус-вектор кожної точки системи у загальному випадку нестаціонарних в'язей залежить від узагальнених координат і часу, тобто $\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, ..., q_n, t)$. Для можливого переміщення $d\bar{r}_k$, маємо

$$d\bar{r}_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} dq_i$$

тому що час при цьому вважається незмінним. Підставляючи це рівняння у загальне рівняння динаміки (34), після зміни порядку додавання по k та i одержимо:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} + \sum_{k=1}^{N} \bar{\Phi}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) dq_i = 0. \qquad (38)$$

Використовуючи узагальнені сили активних сил Q_i і сил інерції Q_i^{Φ}, тобто

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}; \qquad Q_i^{(\Phi)} = \sum_{k=1}^{N} \bar{\Phi}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \qquad (39)$$

з рівняння (37) одержимо загальне рівняння динаміки в узагальнених координатах

$$\sum_{i=1}^{n} (Q_i + Q_i^{(\Phi)}) dq_i = 0. \qquad (40)$$

Узагальнені координати системи незалежні, варіації цих координат не тільки незалежні, але й довільні. Послідовно приймаючи тільки одну з варіацій узагальнених координат, не рівною нулю, а всі інші – рівними нулю, з рівняння (40) одержуємо наступну систему умов:

$$Q_i + Q_i^{(\Phi)} = 0, \quad i = 1, 2, ..., n. \qquad (41)$$

Умови (41) можна назвати принципом Даламбера для системи, вираженому через узагальнені сили. З рівняння (41) випливають умови рівноваги системи:

$$Q_i = 0,\ i = 1,2,...,n,$$

якщо сили інерції точок системи, а, отже і узагальнені сили інерції дорівнюють нулю.

При використанні загального рівняння динаміки необхідно вміти обчислювати елементарну роботу сил інерції системи на можливих переміщеннях. Для цього застосовуються відповідні формули для елементарної роботи, отримані для звичайних сил.

Розглянемо їхнє застосування для сил інерції твердого тіла в окремих випадках його руху.

Поступальний рух. У цьому випадку тіло має три ступені вільності і внаслідок накладених в'язей може здійснювати лише поступальний рух. Можливі переміщення точок тіла, які допускають в'язі, теж є поступальними.

Сили інерції при поступальному русі приводяться до рівнодіючої $\overline{\Phi}^* = -M\overline{a}_c = -M\overline{a}$. Для суми елементарних робіт сил інерції на поступальному можливому переміщенні одержимо:

$$\overline{\Phi}_\kappa \cdot d\overline{r}_k = \overline{\Phi}^* \cdot d\overline{r}_c = \overline{\Phi}^* \cdot d\overline{r} = -M\overline{a} \cdot d\overline{r}\,. \tag{42}$$

де $d\overline{r}_c = d\overline{r}$ – можливе переміщення центра мас і будь-якої точки тіла, тому що поступальне можливе переміщення у всіх точок тіла однакове; однакові й прискорення, тобто $\overline{a}_c = \overline{a}$.

Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі. Тіло в цьому випадку має один ступінь вільності. Воно може обертатися навколо нерухомої осі, наприклад *Oz*. Можливе переміщення, що допускається накладеними в'язями, є теж поворотом на елементарний кут dj навколо нерухомої осі.

Сили інерції, приведені до точки *O* на осі обертання, зводяться до головного вектора $\overline{\Phi}$ й головного моменту $L_o^{(\phi)}$ сил інерції. Головний вектор сил інерції прикладений до нерухомої точки, і його елементарна робота на можливому переміщенні дорівнює нулю. У головного моменту сил інерції елементарну роботу, яка не дорівнює нулю, здійснює тільки його проекція на вісь обертання $L_o^{(\phi)} = -J_{cz}e$. Таким чином, для суми робіт сил інерції на розглянутому можливому переміщенні маємо:

$$\sum_{k=1}^{N} \overline{\Phi_k} \cdot d\bar{r}_k = L_z^{(\phi)} dj = -J_{cz} e dj \ , \tag{43}$$

якщо кут обертання dj відкладати в напрямку дугової стрілки кутового прискорення e .

Плоский рух. В’язі, накладені на тверде тіло, допускають у цьому випадку тільки плоске можливе переміщення. У загальному випадку воно складається з поступального можливого переміщення разом з полюсом, за який оберемо центр мас, і повороту на елементарний кут dj навколо осі *Cz*, що проходить через центр мас перпендикулярно до площини, паралельно якій тіло може здійснювати плоский рух.

Так як сили інерції при плоскому русі твердого тіла можна привести до головного вектора $\overline{\Phi}$ й головного моменту $L_c^{(\phi)}$ (якщо за центр приведення вибрати центр мас), то сума елементарних робіт сил інерції на плоскому можливому переміщенні зведеться до елементарної роботи головного вектора сил інерції $\overline{\Phi} = -M\bar{a}_c$ на можливому переміщенні центра мас і елементарної роботи головного моменту сил інерції на елементарному кутовому переміщенні навколо осі *Cz*, що проходить через центр мас. При цьому не рівну нулю елементарну роботу може здійснити тільки проекція головного моменту сил інерції на вісь *Cz*, тобто $L_{cz}^{(\phi)} = -J_{cz}e$. Таким чином, у розглянутому випадку маємо:

$$\sum_{k=1}^{N} \overline{\Phi_k} \cdot d\bar{r}_k = \overline{\Phi} \cdot d\bar{r}_c + L_{cz}^{(\phi)} dj = -M\bar{a}_c \cdot d\bar{r}_c - J_{cz} e dj \ , \tag{44}$$

якщо поворот на елементарний кут dj направити за дуговою стрілкою для e .

10 МЕТОДИКА РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ І ПРИКЛАДИ ЗАСТОСУВАННЯ ЗАГАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДИНАМІКИ

10.1 Методика розв’язання задач

Методика застосування загального рівняння динаміки відрізняється від методики застосування принципу можливих переміщень (див. п. 5) лише тим, що додатково доводиться визначати роботу сил інерції, прикладених до точок тіла. Для цього можна скористатися отриманими вище залежностями (42), (43) або (44). Крім того слід мати на увазі, що при визначенні зв’язку між залежними можливими переміщеннями слід користуватися міркуваннями кінематики. Бо залежності між можливими переміщеннями точок і тіл системи аналогічні залежностям між відповідними швидкостями точок і кутовими швидкостями тіл. Ця залежність стосується і відповідних прискорень також.

10.2 Приклади розв’язання задач

Приклад 7. *Відцентровий регулятор обертається навколо нерухомої вертикальної осі* O_1O_2 *зі сталою кутовою швидкістю* w *(рис. 22). Сили ваги точкових вантажів* M_1 *і* M_2 *дорівнюють P, повзуна* D – Q*; довжини стрижнів* $A_1M_1 = A_2M_2 = M_1B_1 = M_2B_2 = l,\quad OA_1 = OA_2 = l_1$. *Поперечними розмірами повзуна D, масами пружин, повзуна E і всіх стрижнів знехтувати. Коефіцієнти жорсткості пружин однакові і дорівнюють c. Довжини пружин у недеформованому стані* l_1.

Визначати залежність між кутовою швидкістю обертання регулятора w *і кутом* j .

Застосуємо до регулятора загальне рівняння динаміки у формі:

$$\sum_{k=1}^{N}\left[(F_{kx} + \Phi_{kx})dx_k + (F_{kz} + \Phi_{kz})dz_k\right] = 0,$$

тому що проекції активних сил $\overline{F_k}$ і сил інерції $\overline{\Phi_k}$ на вісь Oy дорівнюють нулю.

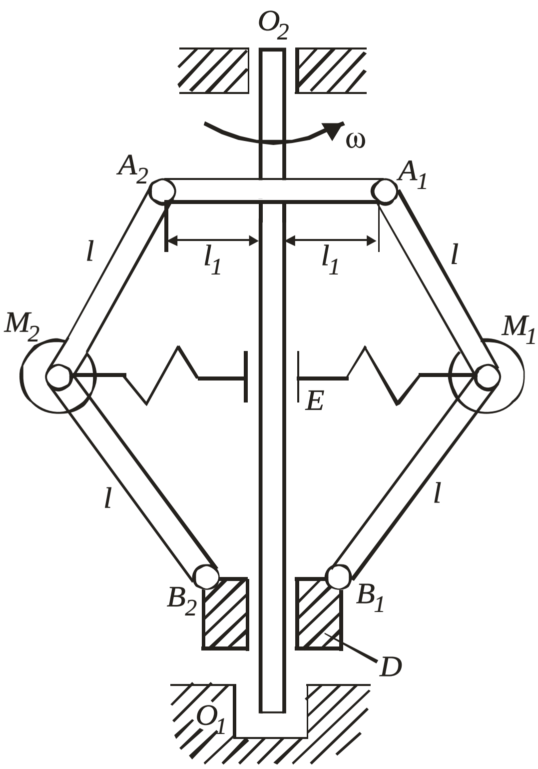


Рисунок 22

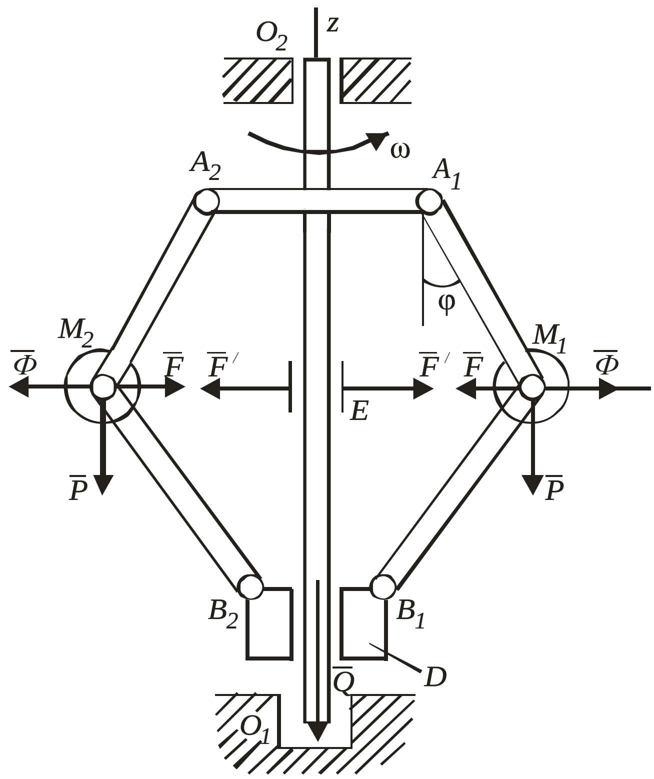


Рисунок 23

Розв’язання

Активними силами є сили ваги $\overline{P}$ і $\overline{Q}$ і сили натягу пружин $\overline{F}$ і $\overline{F}'$. Сили інерції варто врахувати тільки відцентрові для точок M_1 і M_2 (рис. 23), тому що дотичні при обертанні зі сталою кутовою швидкістю дорівнюють нулю.

В’язі в розглянутій задачі ідеальні, якщо знехтувати силами тертя. Декартові координати точки M_1: $x_1; z_1$, а повзуна D: $0; z_2$. Тоді застосування загального рівняння динаміки до регулятора дає:

$$2\Phi dx_1 + 2Pdz_1 - 2Fdx_1 + Qdz_2 = 0. \qquad \text{(a)}$$

При складанні цього рівняння окремо обчислена елементарна робота сил на можливих переміщеннях для точки M_1. Щоб урахувати елементарну роботу таких же сил для матеріальної точки M_2, результат треба подвоїти. Робота сил пружності пружин $\overline{F}'$ прикладених до повзуна *E*, дорівнює нулю.

Для модулів сил інерції $\overline{\Phi}$ і сили пружності $\overline{F}$ маємо:

$$\Phi = \frac{P}{g}\left(l_1 + l\sin j\right)w^2;\; F = c\,l = cl\sin j\ , \qquad (б)$$

де l – подовження пружини.

Для встановлення залежності між варіаціями координат точок одержимо спочатку їхню залежність від кута j :

$$x_1 = l_1 + l\sin j\,;\; z_1 = l\cos j\,;\; z_2 = 2l\cos j\ .$$

Варіюючи ці залежності, отримаємо:

$$dx_1 = l\cos j\,dj\,; dz_1 = -l\sin j\,dj\,; dz_2 = -2l\sin j\,dj\ . \qquad (в)$$

Усі варіації координат виражені через варіацію одного кута j , отже, система має один ступінь вільності.

Підставляючи значення величин з (б) і (в) в (а), після скорочення на $2ldj$ одержимо:

$$\frac{P}{g}\left(l_1 + l\sin j\right)w^2 l\cos j - P\sin j - cl\sin j\cos j - Q\sin j = 0.$$

Розділивши обидві частини цього співвідношення на $\cos j$, одержуємо шукану залежність між w і j :

$$\frac{P}{g}\left(l_1 + \sin j\right)lw^2 - Ptgj - cl\sin j - Qtgj = 0;$$

звідки
$$w^2 = \frac{(P+Q)tgj + cl\sin j}{P\left(l_1 + \sin j\right)l}\,g\ .$$

Приклад 8. *Дано:* M_1 *=5m;* M_2 *=2m;* M_3 *=3m;* M_4 *=m=1кг;* r_2 *=1м;* R_3 *=3м;* r_4 *=3м; R_2=4r_2; R_3=3r_3;*

r_2 *=2м;* r_3 *=3м;* r_4 *=4м; f=0,1;* f_k *=0,2;* $a=30^{0}$*;* $b=60^{0}$. *(рис.3.24)*

Знайти: a_1 *- (прискорення тіла 1).*

Розв’язання

Розглянемо рух механічної системи, що складається з тіл 1, 2, 3, 4, які з’єднані нитками (див. рис. 24). Тіло 1 здійснює поступальний рух, тіла 2 та 3 – обертальний, а тіло 4 – плоско-паралельний.

Застосуємо загальне рівняння динаміки у вигляді (35):

$$\sum dA_k + \sum dA_k^{\Phi} = 0.$$

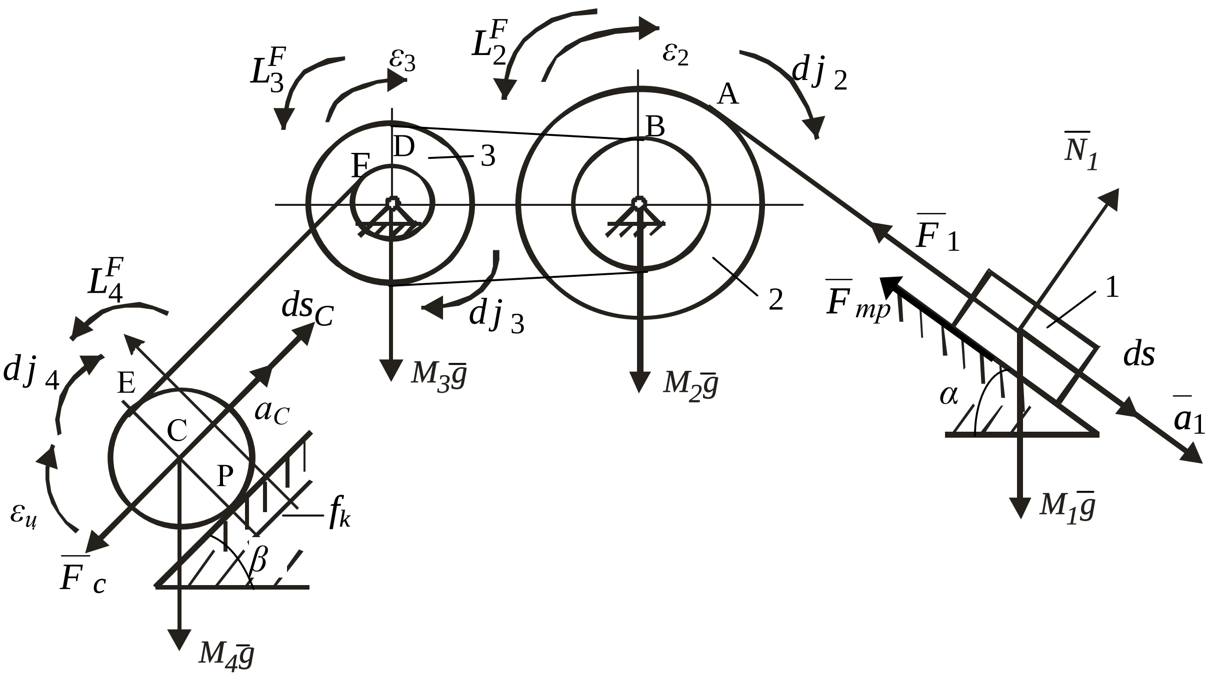


Рисунок 24

1) Система має один ступінь вільності. Зобразимо на рисунку 24 активні сили ваги $M_1\overline{g}, M_2\overline{g}, M_3\overline{g}, M_4\overline{g}$; нормальні реакції $\overline{N}_1$ та $\overline{N}_2$; силу тертя ковзання $\overline{F}_{тр}$. Надамо системі можливого переміщення, вважаючи, що тіло 1 рухається вниз нахиленою площиною. Тіло 1 отримало

можливого переміщення, ds_1, тіло 2 обертається на dj_2, тіло 3 – на dj_3, тіло 4 – на dj_4, а його центр ваги перемістився на ds_c.

2) Зазначимо на рисунку 24 сили та моменти сил інерції: тіло 1 рухається поступально, тому сили інерції приводяться до головного вектора Φ_1; тіла 2 та 3 обертаються, їх сили інерції приводяться до головного моменту сил інерції L_2^Φ та L_3^Φ; тіло 4 рухається у площині, отже сили інерції приводяться і до головного вектора, що прикладений до центру ваги та до головного моменту Φ_c і L_4^Φ відповідно. Вектори сил інерції направлені проти векторів прискорень центрів ваги, а стрілки головних моментів – проти стрілок кутових прискорень.

3) Деякі сили не виконують роботу з таких причин: N_1 перпендикулярна до переміщення тіла 1; $M_2\bar{g}$ та $M_3\bar{g}$ прикладені в нерухомих точках.

4) Складемо загальне рівняння динаміки для заданої системи:

$$M_1 g \sin a ds_1 - F_{mp} ds_1 - \Phi_1 ds_1 - L_2^\Phi dj_2 - L_3^\Phi dj_3 - L_4^\Phi dj_4 - \Phi_c ds_c - N_4 f_k dj_4 - \\ - M_1 g \sin b ds_c = 0.$$

Виразимо деякі величини у цьому рівнянні:

$$F_{mp} = fN_1 = fM_1 g \cos a;\ \Phi_1 = M_1 a_1;\ \Phi_c = M_4 a_c;\ N_4 = M_4 g \cos b;\\ L_2^\Phi = J_2 e_2;\ J_2 = M_2 p_2^2;\ L_3^\Phi = J_3 e_3;\ J_3 = M_3 p_3^2;\ L_4^\Phi = J_c e_4;\ J_c = M_4 p_4^2.$$

5) Виразимо всі можливі переміщення через ds_1, враховуючи, що залежності між можливими переміщеннями, прискореннями і швидкостями однакові. Тоді для швидкостей:

$$V_1 = V_A = R_2 w_2;$$

отже
$$w_2 = V_1 / R_2.$$

тобто

$$\dot\varphi_2 = \dot s_1 / R_2; \Rightarrow d\varphi_2 = ds_1 / R_2; \varepsilon_2 = \frac{a_1}{R_2}.$$

$$V_B = V_Д; \omega_2 r_2 = \omega_3 R_3; \dot\varphi_2 r_2 = \dot\varphi_3 R_3; \Rightarrow \dot\varphi_3 = \dot\varphi_2 r_2 / R_3 = \dot s_1 / 4R_3;$$

$$d\varphi_3 = ds_1 / 4R_3; \varepsilon_3 = \frac{a_1}{4R_3}; (R_3 = 3r_3 - \textit{за умовою задачі})$$

$$V_F = V_E; \omega_3 r_3 = \omega_4 EP; \Rightarrow \omega_4 = \omega_3 r_3 / 2r_4; \dot\varphi_4 = \dot\varphi_3 r_3 / 2r_4 = \dot s_1 / 24r_4;$$

$$d\varphi_4 = ds_1 / 24r_4; \varepsilon_4 = \frac{a_1}{24r_4}$$

$$V_C = \omega_4 CP = \omega_4 r_4; \dot s_C = \dot\varphi_4 r_4 = s_1 / 24; \Rightarrow a_C = a_1 / 24; ds_C = \frac{ds_1}{24}.$$

6) Запишемо загальне рівняння динаміки для всіх зазначених сил:

$$M_1 g \sin\alpha ds_1 - M_1 g f \cos\alpha ds_1 - M_1 a_1 ds_1 - M_2 \rho_2^{\,2} ds_1 a_1 / R_2^{\,2} -$$
$$- M_3 \rho_3^{\,2} ds_1 a_1 / (4R_3)^2 - M_4 \rho_4^{\,2} ds_1 a_1 / (24r_2)^2 M_4 a_1 ds_1 / 24 -$$
$$- M_4 f_k g \cos\beta ds_1 / 24r_4 - M_4 g \sin\beta ds_1 / 24 = 0.$$

Звідси знайдемо прискорення a_1 тіла 1:

$$a_1 = \frac{M_1 g (\sin\alpha - f\cos\alpha) - M_4 g (f_k \cos\beta / 24r_4 + \sin\beta / 24)}{M_1 + M_2 \rho_2^{\,2} / R_2^{\,2} + M_3 \rho_3^{\,2} / 16R_3^{\,2} + M_4 \left(1 + \rho_4^{\,2} / r_4^{\,2}\right) / 24}.$$

Приклад 9. *Призма А, сила ваги якої P_1, розташована на гладенькій горизонтальній площині (рис.25). На грані призми, нахиленої під кутом α до осі х, розташований вантаж В, що має силу ваги P_2. Вантаж В прикріплений до призми за допомогою пружини, що має жорсткість с. Визначити рух призми А і вантажу В вздовж призми, якщо в початковий момент часу система перебувала у спокої і пружина була не деформована. Силами тертя вантажу В вздовж призми А знехтувати.*

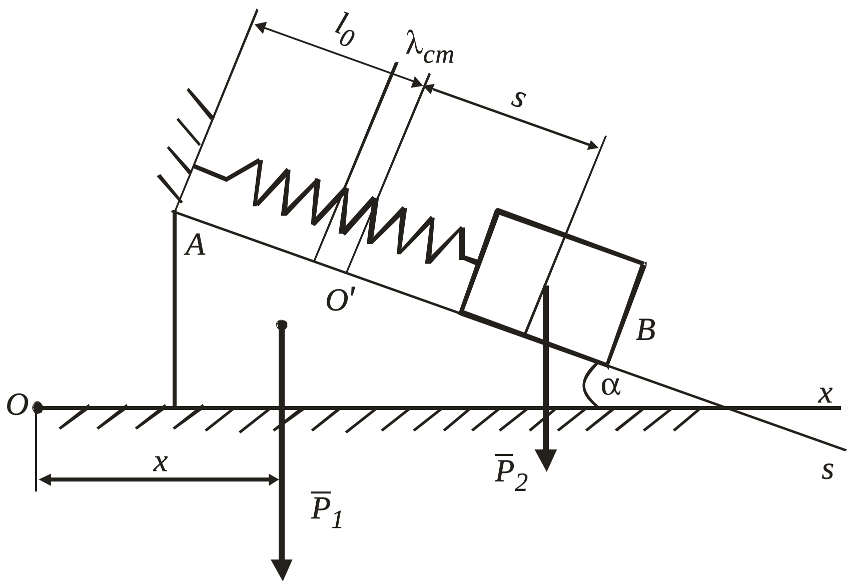


Рисунок 25

Розв'язання

Система має два степені вільності. За узагальнені координати оберемо величини x і s. Активними силами є сили ваги $\overline{P}_1, \overline{P}_2$ і сила пружності (рис.26) пружини F. В'язі ідеальні, тому що поверхні тіл гладенькі. Загальне рівняння динаміки в узагальнених координатах для випадку двох ступенів вільності можна виразити у формі:

$$Q_1 + Q_1^{(\Phi)} = 0, \; Q_2 + Q_2^{(\Phi)} = 0, \qquad \text{(a)}$$

де Q_1, Q_2 – узагальнені сили, віднесені до узагальнених координат x і s;

$Q_1^{(\Phi)}, Q_2^{(\Phi)}$ – узагальнені сили інерції, віднесені до тих же координат.

Узагальнені сили для координати x обчислюємо за формулами:

$$Q_1 = \frac{\left(\sum_{k=1}^{N} \overline{F}_k \cdot d\overline{r}_k\right)_x}{dx}; \quad Q_1^{(\Phi)} = \frac{\left(\sum_{k=1}^{N} \overline{\Phi}_k \cdot d\overline{r}_k\right)_x}{dx}, \qquad \text{(б)}$$

де $\overline{F}_k$ – активна сила, прикладена до k-ї точки системи;

$\overline{\Phi}_k$ – сила інерції.

Індекс x у чисельнику вказує, що суму елементарних робіт на можливих переміщеннях точок $d\bar{r}_k$ слід обчислювати при зміні тільки координати x, вважаючи координату s при цьому сталою. Даючи можливе переміщення dx у напрямку зростання координати x, маємо, за формулами (б), $Q_1 = 0$, тому що сили ваги $\bar{P}_1, \bar{P}_2$ перпендикулярні можливому переміщенню, а сили пружності (одна прикладена до вантажу, інша, рівна першій за модулем, але їй протилежна за напрямком, – до призми в точці закріплення пружини) у сумі дадуть елементарну роботу, яка дорівнює нулю.

Для узагальненої сили інерції, відповідно, маємо

$$Q_1^{(\varPhi)} = \frac{-\varPhi_1 dx - \varPhi_{2x} dx}{dx} = -(\varPhi_1 + \varPhi_{2x}) = -\frac{(P_1 + P_2)\ddot{x} + P_2 \ddot{s} \cos a}{g},$$

тому що проекції сил інерції призми й вантажу на вісь Ox:

$$\varPhi_{1x} = \frac{P_1}{g}\ddot{x}, \quad \varPhi_{2x} = \frac{P_2}{g}(\ddot{s}\cos a + \ddot{x}).$$

Узагальнені сили $Q_2, Q_2^{(\varPhi)}$ на можливому переміщенні ds, спрямованому в бік зростання координати s, при незмінному значенні координати x обчислюємо за формулами:

$$Q_2 = \frac{\left(\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot d\bar{r}_k\right)_s}{ds}; \quad Q_2^{(\varPhi)} = \frac{\left(\sum_{k=1}^{N} \bar{\varPhi}_k \cdot d\bar{r}_k\right)_s}{ds}. \qquad \text{(в)}$$

Маємо

$$Q_2 = \frac{P_2 \sin a ds - F ds}{ds} = P_2 \sin a - F = P_2 \sin a - c(l_{cm} + s) = -cs,$$

тому що сила пружності $F = c\,l = c(l_{cm} + s)$, якщо s відраховувати від положення статичної рівноваги вантажу *B*, де $l_{ст}$ – статистичне подовження пружини під дією вантажу *B* у положенні рівноваги. У положенні статичної рівноваги діючі на вантаж сили перебувають у рівновазі. Проеціюючи їх на вісь $O's$, одержуємо

$$P_2 \sin\alpha - c\, l_{ст} = 0.$$

Для узагальненої сили інерції маємо:

$$Q_2^{(\Phi)} = \frac{-\Phi_{2s} ds}{ds} = -\frac{P_2}{g}\left(\ddot{s} + \ddot{x}\cos\alpha\right),$$

де Φ_{2s} – проекція сили інерції вантажу *B* на вісь $O's$. Підставляючи отримані значення узагальнених сил у рівняння (а), одержимо наступну систему диференціальних рівнянь:

$$\left(P_1 + P_2\right)\ddot{x} + P_2 \cos\alpha\, \ddot{s} = 0; \; -cs - \frac{P_2}{g}\left(\ddot{s} + \ddot{x}\cos\alpha\right) = 0. \qquad (\text{а}')$$

Виключаючи із другого рівняння (а′) за допомогою першого *x*, маємо наступне диференціальне рівняння для *s*:

$$\ddot{s} + \frac{\left(P_1 + P_2\right)cg}{P_2\left[P_1 + P_2\left(1 - \cos^2\alpha\right)\right]} s = 0,$$

або

$$\ddot{s} + k^2 s = 0, \qquad (\text{д})$$

де

$$k^2 = \frac{\left(P_1 + P_2\right)cg}{P_2\left[P_1 + P_2\left(1 - \cos^2\alpha\right)\right]}.$$

Інтегруючи рівняння (д), одержимо

$$s = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \qquad (\text{д}')$$

Сталі інтегрування C_1 і C_2 визначаємо з початкових умов:

$$t = 0; s = -l_{cm} = -\frac{P_2 \sin a}{c}; \dot{s} = 0 .$$

Диференціюючи рівняння (д′), маємо:

$$\dot{s} = -C_1 \sin kt + C_2 \cos kt . \qquad (д'')$$

З рівнянь (д′) і (д′′) при t=0 одержуємо:

$$-l_{cm} = C_1; C_2 = 0 .$$

Після цього маємо:

$$s = -l_{cm} \cos kt = -\frac{P_2 \sin a}{c} \cos \sqrt{\frac{(P_1 - P_2)cg}{P_2 \left(P_1 + P_2 \sin^{2a}\right)}} + t .$$

Підставляючи з (д) значення s у перше з рівнянь (а′′), одержуємо наступне диференціальне рівняння для x:

$$\ddot{x} = \frac{P_2 k^2 l_{cm} \cos a}{P_1 + P_2} \cos kt . \qquad (ж)$$

Інтегруючи його, маємо:

$$\dot{x} = \frac{P_2 k l_{cm} \cos a}{P_1 + P_2} \sin kt + C_3 . \qquad (ж')$$

Інтегруючи ще раз, одержимо:

$$x = -\frac{P_2 l_{cm} \cos a}{P_1 + P_2} \cos kt + C_3 t + C_4 . \qquad (ж'')$$

Сталі інтегрування C_3, C_4 визначаємо з початкових умов: $t = 0; x = 0; \dot{x} = 0$. Використовуючи ці початкові умови, з (ж′) і (ж″) маємо

$$0 = C_3; 0 = -\frac{P_2\, l_{cm} \cos a}{P_1 + P_2} + C_4 \text{ або } C_3 = 0; C_4 = \frac{P_2\, l_{cm} \cos a}{P_1 + P_2}.$$

Після цього отримаємо:

$$x = \frac{P_2\, l_{cm} \cos a}{P_1 + P_2}\left(1 - \cos kt\right).$$

Таким чином, призма *A* рухається згідно з законом:

$$x = \frac{P_2\, l_{cm} \cos a}{P_1 + P_2}\left(1 - \cos kt\right),$$

вантаж *B* рухається вздовж призми за законом: $s = l_{cm} \cos kt$.

11 РІВНЯННЯ ЛАГРАНЖА

Розглянемо систему N матеріальних точок, підпорядковану l голономним ідеальним в'язям. Диференціальні рівняння руху точок матеріальної системи в координатній формі (тобто в проекціях на декартові осі координат) мають вигляд:

$$\begin{aligned} m_k \ddot{x}_k &= F_{x_k} + R_{x_k}; \\ m_k \ddot{y}_k &= F_{y_k} + R_{y_k}; \\ m_k \ddot{z}_k &= F_{z_k} + R_{z_k}, \end{aligned} \tag{45}$$

де $k = 1,2,...,N$, m_k – маса k-ї точки системи; $F_{x_k}, F_{y_k}, F_{z_k}$ – проекції головного вектора активних сил, прикладених до k-ї точки;

$R_{x_k}, R_{y_k}, R_{z_k}$ – проекції рівнодійних реакцій в'язей, накладених на k-у точку.

Якщо активні сили задані, то система рівнянь (45) є системою $3N$ рівнянь із $6N$ невідомими, оскільки $3N$ проекції реакцій в'язей $R_{x_k}, R_{y_k}, R_{z_k}$ також невідомі.

Приєднаємо до цих рівнянь l рівняння в'язей:

$$f_i(x_k, y_k, z_k, t) = 0; \quad i = 1,2,...,l. \tag{46}$$

Тоді матимемо $(3N + l)$ рівнянь. Для отримання $(3N + l)$ рівнянь потрібно врахувати властивості в'язей. Оскільки в'язі ідеальні, то проекції реакції в'язей задовольняють умову

$$\sum_{k=1}^{N} \left(R_{x_k} dx_k + R_{y_k} dy_k + R_{z_k} dz_k \right) = 0. \tag{47}$$

При цьому варіації координат $dx_k; dy_k; dz_k$ мають задовольняти рівняння

$$\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial fi}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial fi}{\partial y_k} dy_k + \frac{\partial fi}{\partial z_k} dz_k \right) = 0, \tag{48}$$

яке легко отримати, проваріювавши (46).

Кожне з рівнянь (48) помножимо відповідно на невизначені множники Лагранжа $l_1, l_2, ..., l_k$, які можуть бути функціями координат і часу.

$$\sum_{k=1}^{N} l_i \left(\frac{\partial fi}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial fi}{\partial y_k} dy_k + \frac{\partial fi}{\partial z_k} dz_k \right) = 0. \tag{49}$$

Після відповідних математичних перетворень отримаємо:

$$\begin{cases} m_k \ddot{x}_k = F_{\kappa x} + \sum\limits_{i=1}^{l} l_k \dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}; \\ m_k \ddot{y}_k = F_{\kappa y} + \sum\limits_{i=1}^{l} l_k \dfrac{\partial f_i}{\partial y_k}; \\ m_k \ddot{z}_k = F_{\kappa z} + \sum\limits_{i=1}^{l} l_k \dfrac{\partial f_i}{\partial z_k}. \end{cases} \tag{50}$$

Приєднуючи до цих 3n рівнянь (50) l рівнянь в'язей (46), матимемо (3n+ l) рівнянь відносно (3N+ l) невідомих координат (x_κ, y_k, z_k, 3N) множників Лагранжа (λ_1; λ_2, …, λ_i). Після розв'язання цієї системи рівнянь можна знайти фракції в'язей на координатні осі.

Рівняння (50) називають рівняннями Лагранжа першого роду.

Зазначимо, що для аналітичних досліджень у системах з великою кількістю точок рівняння (50) малоефективні. Навіть дослідження руху однієї невільної точки створює значні труднощі. Тому рівняння Лагранжа першого роду для складних систем доцільно досліджувати чисельними методами за допомогою комп'ютерних технологій.

А для аналітичного дослідження механічні системи (особливо з декількома ступенями вільності) використовують рівняння Лагранжа другого роду, які дуже часто називають просто рівняннями Лагранжа. Їх одержують з принципу Даламбера (41) в узагальнених координатах, використовуючи при цьому три наступні тотожності.

11.1 Тотожності Лагранжа

Для одержання рівнянь Лагранжа потрібно використати тотожності. Одна з них – добре відома формула диференціювання скалярного добутку двох будь-яких векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, тобто

$$\frac{d}{dt}\left(\bar{a} \cdot \bar{b}\right) = \frac{d\bar{a}}{dt} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \left(\frac{d\bar{b}}{dt}\right),$$

або

$$\frac{d\bar{a}}{dt} \cdot \bar{b} = \frac{d}{dt}\left(\bar{a} \cdot \bar{b}\right) - \bar{a} \cdot \frac{d\bar{b}}{dt}.$$

Якщо прийняти за $\bar{a}$ вектор швидкості $\bar{V}_k = \dot{\bar{r}}_k$, а за $\bar{b}$ – вектор $\dfrac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}$,

то відповідно до цієї тотожності одержимо:

$$\dot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\right) - \dot{\bar{r}}_k \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\right). \tag{51}$$

Інша тотожність (тотожність Лагранжа) виражається у вигляді

$$\partial \bar{r}_k / \partial q_i = \partial \dot{\bar{r}}_k / \partial \dot{q}_i ,$$

де крапки над величинами означають їхні похідні за часом. Величина $\dot{q}_i = dq_i / dt$ називається узагальненою швидкістю. Тотожність (52) затверджує, що «крапки» (диференціювання за часом) можна поставити одночасно в чисельнику і знаменнику або їх «скоротити». Справедливість рівняння (52) доводиться обчисленням величин, що входять до нього, і їхнім порівнянням. Дійсно, у загальному випадку

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k \left[q_1(t), q_2(t), \ldots, q_n(t), t \right].$$

При русі системи узагальнені координати теж є функціями часу. Диференціюючи $\bar{r}_k$ за часом як його складну функцію, маємо:

$$\dot{\bar{r}}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}\dot{q}_i + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t}. \tag{52}$$

Частинні похідні $\partial \bar{r}_k / \partial q_i$ і $\partial \bar{r}_k / \partial t$ не можуть залежати від узагальнених швидкостей $\dot{q}_i$; отже, частинне диференціювання за $\dot{q}_i$ з фіксованим номером обох частин рівняння (52) дає тільки коефіцієнт при цій змінній. Усі інші додатки при диференціюванні дадуть нулі, тому що вони не залежать від $\dot{q}_i$ із цим фіксованим номером. Маємо:

$$\frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}.$$

Тотожність (52) доведено.

Інша тотожність Лагранжа полягає в перестановці порядку диференціювання за часом і узагальненою координатою вектора $\bar{r}_k$ тобто

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_i}. \tag{53}$$

Для доказу цієї тотожності обчислимо $\partial \dot{\bar{r}}_k / \partial q_i$, використовуючи рівняння (52) і з огляду на те, що узагальнені швидкості не залежать від узагальнених координат, одержимо:

$$\frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{dq_i} = \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_n} q_n + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial t}. \tag{54}$$

З іншого боку, $\partial \bar{r}_k / \partial q_i$ є складна функція часу, що залежить від нього не тільки явно, але й через узагальнені координати. За правилом диференціювання складних функцій, маємо:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial t}. \tag{55}$$

Порядок частинного диференціювання в змішаних похідних можна змінювати. З урахуванням цього рівняння (54) і (55) збігаються. Таким чином, друга тотожність (53) Лагранжа доведена.

11.2 Доведення рівнянь Лагранжа

Для одержання з рівняння (41): $Q_i + Q_i^{\Phi} = 0$, або: $-Q_i = Q_i$ рівнянь

Лагранжа для узагальненої сили інерції необхідно довести справедливість наступної формули

$$Q_i^{(\varPhi)} = -\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right], \tag{56}$$

де $T = \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{m_k \bar{V}_k^2}{2} = \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{m_k V_k^2}{2}$ – кінетична енергія системи при її русі відносно інерціальної системи відліку.

Для доказу (56)обчислимо $Q_i^{(\varPhi)}$, використовуючи її визначення через силу інерції $\bar{\varPhi}_k = -m_k \bar{a}_k = -m_k \ddot{\bar{r}}_k$. Маємо:

$$Q_i^{(\varPhi)} = \sum_{k=1}^{N} \bar{\varPhi}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = -\sum_{k=1}^{N} m_k \ddot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}. \tag{57}$$

Перетворимо вираз

$$A = \ddot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}.$$

Відповідно до тотожності (51)

$$A = \ddot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\bar{r}}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\right) - \dot{\bar{r}}_k \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\right).$$

Застосуємо тотожності Лагранжа:

$$\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial \dot{q}_i}; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \bar{V}_k}{\partial \dot{q}_i}.$$

Після цього

$$A=\frac{d}{dt}\left(\overline{V}_k\cdot\frac{\partial\overline{V}_k}{\partial\dot{q}_i}\right)-\overline{V}_k\cdot\frac{\partial\overline{V}_k}{\partial\dot{q}_i}.$$

Підставляючи це значення A у рівняння (57) і вносячи постійну масу під знак похідних, а похідні виносячи за знак сум, одержимо:

$$Q_i^{(\Phi)}=-\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{d\dot{q}_i}\sum_{k=1}^{N}\frac{m_k\overline{V}_k^2}{2}\right)-\frac{\partial}{\partial q_i}\sum_{k=1}^{N}\frac{m_k\overline{V}_k^2}{2}\right]=-\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}\right].$$

Формула (56) доведена.

Підставляючи вираження (56) для $Q_i^{(\Phi)}$ в рівняння (41), одержимо наступну систему ***n*** рівнянь Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i,\qquad i=1,2,....,n. \tag{58}$$

Різниця між першою похідною за часом від частинної похідної від кінетичної енергії системи за узагальненою швидкістю і частиною похідною від кінетичної енергії за узагальненою координатою дорівнює узагальненій силі, що відповідає узагальненій координаті.

Кількість рівнянь Лагранжа дорівнює числу степенів вільності системи.

11.3 Структура рівнянь Лагранжа і їхнє складання

Рівняння Лагранжа для узагальнених координат є звичайними диференціальними рівняннями другого порядку, як і диференціальні рівняння руху точки в декартових координатах. Число рівнянь Лагранжа збігаються із числом узагальнених координат. Дійсно, для кінетичної енергії системи, використовуючи її визначення і формулу (52) для $\dot{\overline{r}}_k=\overline{V}_k$, маємо:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} A_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j + \sum_{k=1}^{N} B_i\dot{q}_i + \frac{1}{2}C,$$

де уведені позначення

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{N} m_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}; \qquad B_i = \sum_{k=1}^{N} m_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t}; \qquad C = \sum_{k=1}^{N} m_k \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\right)^2 .$$

Величини A_{ij}, B_i, C можуть залежати від узагальнених координат і часу, але не залежать від узагальнених швидкостей. З урахуванням цього:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{i=1}^{n} A_{ij}\dot{q}_j + B_j$$

і

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{i=1}^{n}\left(A_{ij}\ddot{q}_j + \frac{dA_{ij}}{dt}\dot{q}_j \right) + \frac{dB_i}{dt} .$$

Цей вираз містить $\ddot{q}_j$, тобто похідну від узагальненої координати тільки другого порядку. Інші складові рівнянь Лагранжа містять похідні від узагальнених координат не вище першого порядку. Активні сили $\bar{F}_k$, якщо вони не залежать від прискорень точок не можуть дати залежності Q_i від узагальнених прискорень.

Інтегруючи рівняння Лагранжа для випадку заданих активних сил, одержимо всі узагальнені координати як функції часу і $2n$ сталі інтегрування. Для визначення цих сталих необхідно додатково задати початкові умови, тобто, наприклад, при t=0 задати

$$q_i = q_{i0}, \quad \dot{q}_i = \dot{q}_{i0},$$

де q_{i0} й $\dot{q}_{i0}$ – початкові значення узагальнених координат й узагальнених швидкостей.

При складанні рівнянні Лагранжа можна рекомендувати наступний порядок операцій:

1 Обчислити кінетичну енергію системи в її русі відносно інерціальної системи відліку.

2 Вибравши узагальнені координати, число яких дорівнює числу ступенів вільності системи, перетворити кінетичну енергію за узагальненими координатами.

3 Виконати операції диференціювання кінетичної енергії, передбачені рівняннями Лагранжа.

4 Обчислити одним із способів, зазначених у п.7.2 узагальнені сили системи.

5 Дорівняти величини лівої й правої частини, що входять до рівняння Лагранжа.

6 Знайти необхідні величини.

11.4 Рівняння Лагранжа для потенціальних сил

Якщо сили, що діють на точки системи, є потенціальними, то для узагальнених сил справедлива формула $Q_i = \partial U / \partial q_i$. Силова функція U не залежить від узагальнених швидкостей, тому похідну від неї за узагальненою швидкістю $\partial U / \partial \dot{q}_i = 0$ можна додати до $\partial T / \partial \dot{q}_i = 0$. З урахуванням цього, після переносу всіх додатків у ліву частину, одержимо наступне рівняння Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i}\right) = 0, \qquad i = 1,2,...,n\,.$$

Якщо ввести функцію Лагранжа, або лагранжіан, за формулою

$$L = T + U = T - \Pi\,, \tag{59}$$

то рівняння Лагранжа для випадку потенціальних сил набудуть форми

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0, \qquad i=1,2,...,n. \tag{60}$$

Функція Лагранжа відрізняється від повної механічної енергії системи

$$E=T+\Pi=T-U.$$

З рівнянь Лагранжа для потенціальних сил у випадку стаціонарності в'язей системи можна одержати раніше встановлений закон збереження повної механічної енергії

$$E=T+\Pi=h,$$

де h – стала величина.

11.5 Циклічні координати і циклічні інтеграли

Функція Лагранжа $L=T+U$ у загальному випадку залежить від узагальнених швидкостей, узагальнених координат і часу.

Якщо будь-яка узагальнена координата, наприклад q_j, не входить до вираз функції Лагранжа, то для неї

$$\partial L/\partial q_j=0. \tag{61}$$

Узагальнена координата, що задовольняє умові (61), називається циклічною. Для циклічної узагальненою координати q_j рівняння Лагранжа набуде форми

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}=0.$$

З нього одержуємо циклічний інтеграл рівнянь Лагранжа

$$\partial L / \partial \dot{q}_j = C_j ,$$

де C_j – стала величина.

До циклічного інтегралу можуть входити похідні за часом від узагальнених координат, у тому числі й похідна за часом від циклічної координати не вище першого порядку. Отже, рівняння (61), на відміну від рівнянь Лагранжа, у загальному випадку є звичайним диференціальним рівнянням не вище першого порядку. Якщо всі узагальнені координати є циклічними, то система рівнянь Лагранжа, які мають другий порядок, заміниться циклічними інтегралами, що мають тільки перший порядок. Інтегрувати систему рівнянь першого порядку значно простіше, ніж систему другого порядку. Пошук узагальнених координат, які є циклічними, має велике значення. Використовуючи циклічні інтеграли, можна так званим методом інтегрування координат зменшити число рівнянь Лагранжа на кількість циклічних координат, не підвищуючи при цьому порядку одержуваних диференціальних рівнянь.

Інший напрямок в аналітичній динаміці складається з пошуку самих інтегралів рівнянь Лагранжа або іншої системи рівнянь, їм еквівалентної.

Аналітична механіка після Лагранжа одержала великий розвиток і застосування в різних галузях науки й техніки. Її методи особливо широко застосовуються в теорії коливань системи й у квантовій механіці.

11.6 Методика і приклади розв’язання задач за допомогою рівнянь Лагранжа другого роду

Методика розв'язання задач за допомогою рівнянь Лагранжа другого роду була наведена наприкінці пункту 11.3. Тому розглянемо декілька прикладів використання цієї методики при вирішенні задач.

Приклад 10. *Однорідний диск* A *силою ваги* $P = 100H$ *обмотаний нерозтяжною ниткою, що перекинута через блок* B *і прикріплена до вантажу* D*, сила ваги якого* $P_2 = 200H$ *(рис.26). Вантаж* D *може* *ковзати по нерухомій похилій площині з кутом нахилу* $a = 30^{\mathbf{0}}$. *Коефіцієнт тертя ковзання між вантажем і площиною* $f = 0{,}3$. *Блок* B, *що має силу ваги* $P_1 = 400H$, *прийняти за однорідний диск.*

Визначити прискорення вантажу D *і осі диска* A, *а також натяг нитки і тиск на вісь блоку, якщо нитка не проковзує по блоку. Тертям на осі блоку й масою нитки знехтувати. Рух починається зі стану спокою.*

Розв’язання

Система тіл, що рухається, має два ступені вільності. За узагальнені координати системи приймемо переміщення s вантажу вздовж похилої площині і кут j повороту диска A. Вважаємо напрямок кута j додатним проти годинникової стрілки, а переміщення s має додатний напрямок – вниз похилою площиною.

В'язями системи є нитка, вісь блоку і негладенька похила площина. Якщо похилу площину замінити силами реакцій в'язей, то в'язі, що залишилися, виявляться ідеальними, але з’явиться додатковий ступінь вільності у вантажу D. Можна зробити в'язі системи ідеальними, вважаючи похилу площину ідеально гладенькою, а шорсткість її поверхні і поверхні вантажу D компенсувати силою тертя. У цьому випадку додатковий ступінь вільності не з’явиться. В’язі системи виявляться ідеальними, і для її руху можна скласти рівняння Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial T}{\partial s} = Q_s; \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{j}} - \frac{\partial T}{\partial j} = Q_j \; .$$

Кінетична енергія системи складається з кінетичних енергій окремих тіл:

$$T = T_A + T_B + T_D .$$

Диск A здійснює плоский рух. Його кінетична енергія обчислюється за формулою

$$T_A = \frac{P}{g}\frac{V_C^2}{2} + J_{C_z}\,\frac{\dot{j}^2}{2},$$

де V_c – швидкість центра мас диска;

$J_{C_z} = \dfrac{P}{g}\dfrac{r^2}{2}$ – момент інерції диска щодо осі, що проходить через центр мас перпендикулярно площині диска;

r – радіус диска.

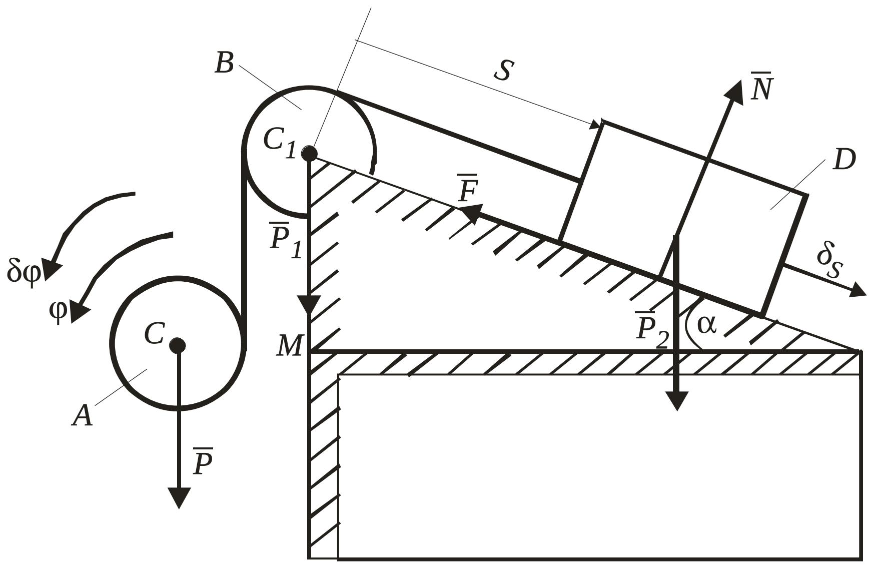


Рисунок 26

Блок B обертається навколо нерухомої осі. Його кінетична енергія обчислюється за формулою

$$T_B = J_{C1_z}\frac{\dot{\varphi}_1^2}{2},$$

де $\dot{\varphi}_1$ – кутова швидкість блоку;

$J_{C1_z} = \dfrac{P_1}{g}\dfrac{r_1^2}{2}$ – момент інерції щодо осі обертання; r_1 – радіус блоку.

Вантаж D рухається поступально, і його кінетична енергія

$$T_D = \frac{P_2}{g}\frac{\dot{s}^2}{2}.$$

Так як нитка нерозтяжна й не сковзає по блоку, то кутова швидкість блоку зв'язана зі швидкістю вантажу співвідношенням $\dot{s} = -r_1\dot{\varphi}_1$. Швидкість вантажу припускаємо спрямованою вниз вздовж похилої площини, а, отже, на початку руху зі стану спокою вниз спрямоване і прискорення вантажу. Усі точки нитки мають однакове числове значення швидкості $|\dot{s}|$. Отже, таку ж швидкість має і точка M диска. Прийнявши її за полюс, визначаємо швидкість точки C за формулою, що зв'язує швидкості двох точок тіла при плоскому русі:

$$\overline{V}_C = \overline{V}_M + \overline{V}_{CM},$$

де $V_{CM} = MC|\dot{\varphi}|$.

При обертанні диска проти годинникової стрілки швидкість $\overline{V}_{CM}$ спрямована вертикально вниз, а $\overline{V}_M$ – вертикально вгору при русі вантажу D униз вздовж похилої площини. Отже, $V_C = \dot{s} - r\dot{\varphi}$, де напрямок вгору вважається додатнім для точки C.

Виражаємо кінетичну енергію системи через узагальнені швидкості і координати. Маємо:

$$T = T_A + T_B + T_D = \frac{P}{g}\frac{\left(\dot{s} - r\dot{\varphi}\right)^2}{2} + \frac{P \cdot r^2}{2}\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{P_1}{2g}\frac{\dot{s}^2}{2} + \frac{P_2}{g}\frac{\dot{s}^2}{2} =$$

$$= \frac{\dot{s}^2}{2g}\left(P + \frac{P_1}{2} + P_2\right) + \frac{3P \cdot r^2}{4g}\dot{\varphi}^2 - \frac{P \cdot r}{g}\dot{s}\dot{\varphi}.$$

Обчислюємо похідні, що входять до лівих частин рівнянь Лагранжа:

$$\frac{\partial T}{\partial s} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = \frac{\dot{s}}{g}\left(P + \frac{P_1}{2} + P_2\right) - \frac{P \cdot r}{g}\dot{\varphi};$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = \frac{\ddot{s}}{g}\left(P + \frac{P_1}{2} + P_2\right) - \frac{P \cdot r}{g}\ddot{\varphi};$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{3P \cdot r^2}{2g}\dot{\varphi} - \frac{P \cdot r}{g}\dot{s}; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{3P \cdot r^2}{2g}\ddot{\varphi} - \frac{P \cdot r}{g}\ddot{s}.$$

При обчисленні узагальнених сил треба враховувати сили ваги $\overline{P}, \overline{P_1}, \overline{P_2}$ і силу тертя $\overline{F}$ похилої площини. Реакції ідеальних в’язей (нитка, вісь блоку, гладенька похила площина) враховувати не потрібно. Важливо вибрати правильний напрямок для сили тертя $\overline{F}$, що завжди спрямована проти швидкості руху $\dot{s}$ вантажу D. Але напрямок руху вантажу заздалегідь не відомий. Припустимо, що рух вантажу спрямований вниз вздовж похилої площини, тоді сила тертя буде мати протилежний напрямок. Вирішуємо задачу при цьому припущенні. Якщо одержимо $\ddot{s}$ (у цьому випадку і $\dot{s}$, тому що рух починається зі стану спокою) зі знаком плюс, то прийняте припущення правильне. Якщо ж прискорення $\ddot{s}$ (а, отже, і швидкість $\dot{s}$) вийде від’ємним, то треба змінити напрямок сили тертя на зворотний і знову вирішити задачу, тому що передбачуваний напрямок сили тертя виявився спрямованим вздовж лінії руху вантажу, тобто неправильно. При $\ddot{s} = 0$ рух вантажу зі стану спокою початися не може.

Установивши передбачуваний напрямок сили тертя проти руху вантажу нагору по похилій площині, обчислюємо узагальнену силу Q_s. Надаємо системі такого можливого переміщення, що допускають в’язі, при цьому кут φ не змінюється, а змінюється тільки узагальнена координата s на додатну величину δs, тобто надаємо можливе переміщення вантажу вбік зростаючих значень s униз вздовж похилої площині. За формулою для узагальненої сили маємо:

$$Q_s = \frac{\left(\sum dA_k\right)_s}{ds} = \frac{\left(P_2 \sin\alpha - fN\right)ds - P ds}{ds} = P_2 \sin\alpha - fN - P,$$

так як при $\varphi = const$ переміщення точки C диска таке ж, як і у точки M, а $F = F_{\max} = fN$. Сила $\overline{P_1}$ прикладена в нерухомій точці і її елементарна робота на можливому переміщенні дорівнюють нулю, тому що можливе переміщення нерухомої точки дорівнює нулю.

Нормальну реакцію похилої площини визначаємо з умови рівноваги сил для вантажу D у напрямку нормалі до похилої площини. Маємо:

$$N - P_2 \cos\alpha = 0; \quad N = P_2 \cos\alpha .$$

З урахуванням цього

$$Q_s = P_2(\sin\alpha - f\cos\alpha) - P.$$

При обчисленні узагальненої сили Q_φ надаємо системі можливого переміщення, при якому змінюється тільки узагальнена координата φ на додатну величину $d\varphi$, а узагальнена координата s не змінюється. Одержуємо:

$$Q_\varphi = \frac{\left(\sum dA_k\right)_\varphi}{d\varphi} = \frac{P d s_c}{d\varphi}.$$

У цьому випадку точка M диска є його миттєвим центром швидкостей, тому $d s_c = r d\varphi$ і при додатному $d\varphi$ спрямоване вниз за силою $\overline{P}$. Елементарна робота інших сил на цьому можливому переміщенні дорівнює нулю, тому що точки їхнього прикладення залишаються нерухомими при цьому переміщенні.

Таким чином,

$$Q_\varphi = \frac{P d s_c}{d\varphi} = P \cdot r.$$

Підставляючи обчислені значення в рівняння Лагранжа, одержимо рівняння:

$$\frac{\ddot{s}}{g}\left(P + \frac{P_1}{2} + P_2\right) - \frac{\ddot{\varphi}}{g} P \cdot r = P_2(\sin\alpha - f\cos\alpha) - P;$$

$$\frac{\ddot{s}}{g} P \cdot r - \frac{\ddot{\varphi}}{g} \cdot \frac{3}{2} P \cdot r^2 = -P \cdot r.$$

З останнього рівняння виражаємо $\ddot{\varphi}$ через $\ddot{s}$. Маємо:

$$r\ddot{\varphi} = \frac{2}{3}(g + \ddot{s}).$$

Підставляючи це значення у перше рівняння, одержуємо:

$$\frac{\ddot{x}}{g}\left(\frac{P}{3}+\frac{P_1}{2}+P_2\right)=P_2(\sin\alpha - f\cos\alpha)-\frac{P}{3},$$

або

$$\frac{\ddot{x}}{g}1300=600\cdot 0{,}24-100;\ \ddot{x}=0{,}034g\approx 0{,}33\,м/c^2.$$

Знак плюс при $\ddot{x}$ (у цьому випадку і у $\dot{x}$) указує, що рух вантажу D дійсно спрямований вниз по похилій площині, як і передбачалося.

Прискорення точки C можна одержати диференціюванням за часом виразу для її швидкості $V_c=\dot{x}-r\dot{\varphi}$, справедливого для будь-якого моменту часу. Маємо

$$\frac{dV_c}{dt}=\ddot{x}-r\ddot{\varphi}.$$

Таким чином,

$$a_c=a_c^t=\ddot{x}-r\ddot{\varphi}=\ddot{x}-\frac{2}{3}(g+\ddot{x})=\frac{\ddot{x}}{3}-\frac{2}{3}g=-0{,}656g=-6{,}43\,м/c^2.$$

Знак мінус при a_c вказує, що прискорення $\bar{a}_c$ спрямоване вниз, тому що за додатний напрямок був прийнятий напрямок вгору.

Для визначення сил натягу ниток застосуємо до вантажу й диска принцип Даламбера. Для вантажу D (рис.27), проектуючи сили на вісь Ox, одержуємо:

$$S_2+\Phi_2-P_2\sin\alpha+fN=0.$$

Але

$$\Phi_2=\frac{P_2}{n}\ddot{x};\quad N=P_2\cos\alpha.$$

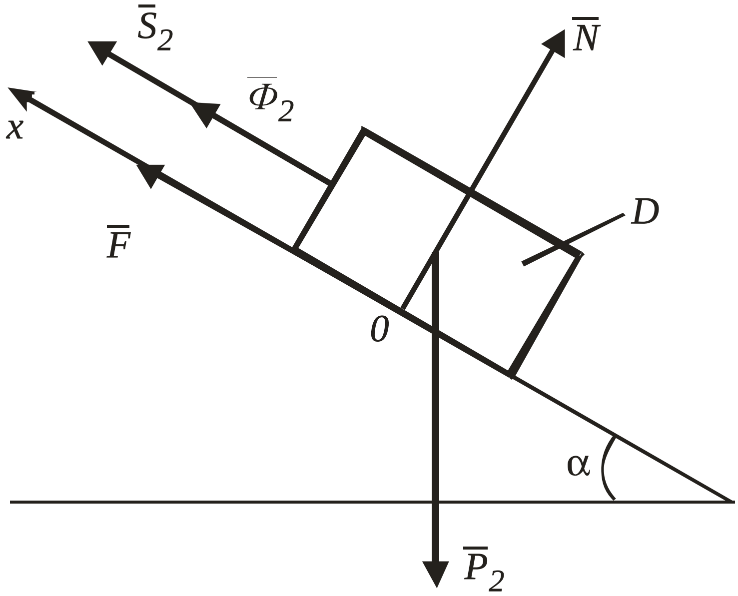


Рисунок 27

Отже $$S_2 = P_2\left(\sin a - f\cos a - \frac{\ddot{x}}{g}\right) = 41{,}2H\ .$$

Для диска A (рис. 28), проеціюючи сили на вісь Cy, маємо:

$$S_1 + \Phi - P = 0\text{, але } \Phi = \frac{P}{g}a_c\,.$$

Тому $S_1 = P\left(1 - \frac{a_c}{g}\right) = 100(1 - 0{,}656) \approx 34{,}4H$.

Так як центр мас блоку нерухомий, то за теоремою про рух центра мас (рис.29) необхідна рівновага сил:

$$0 = X_1 + S_2\cos a;\quad 0 = Y_1 - S_1 - P_2 - S_2\sin a\ .$$

Із цих рівнянь визначаємо проекції реакції осі блоку $\bar{X}_1$ і $\bar{Y}_1$:

$$X_1 = -S_2\cos a = -35{,}4H;\quad Y_1 = P_2 + S_1 + S_2\sin a = 455{,}1H\ .$$

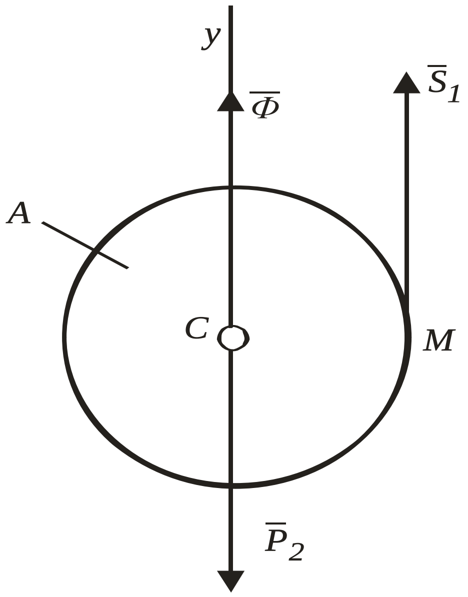


Рисунок 28

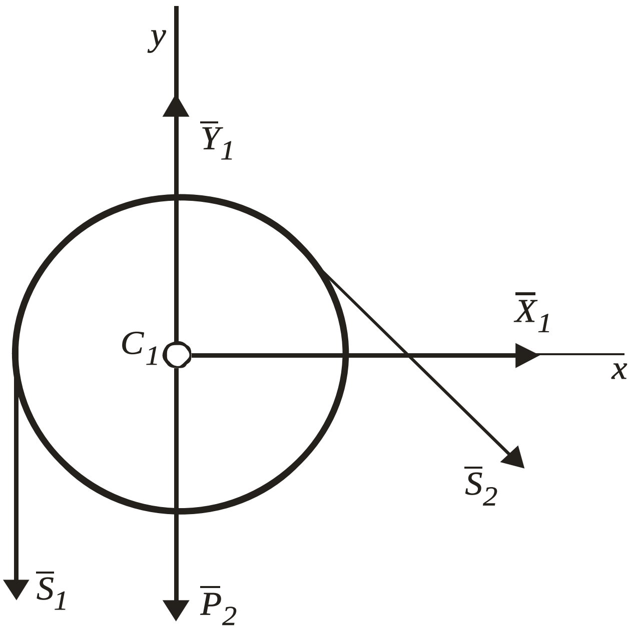


Рисунок 29

Числова величина реакції осі блоку, а отже, і тиску блоку на вісь:

$$N_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2} \approx 456{,}4H .$$

Приклад 11. *До кривошипа OA епіциклічного механізму прикладений сталий обертальний момент M (рис.30). Визначити кутове прискорення кривошипа і окружне зусилля S в точці стикання коліс, якщо відстань між осями коліс дорівнює l, радіус зовнішнього колеса відповідно дорівнює r,* P_1 *і* P_2*; механізм розташований у вертикальній площині.*

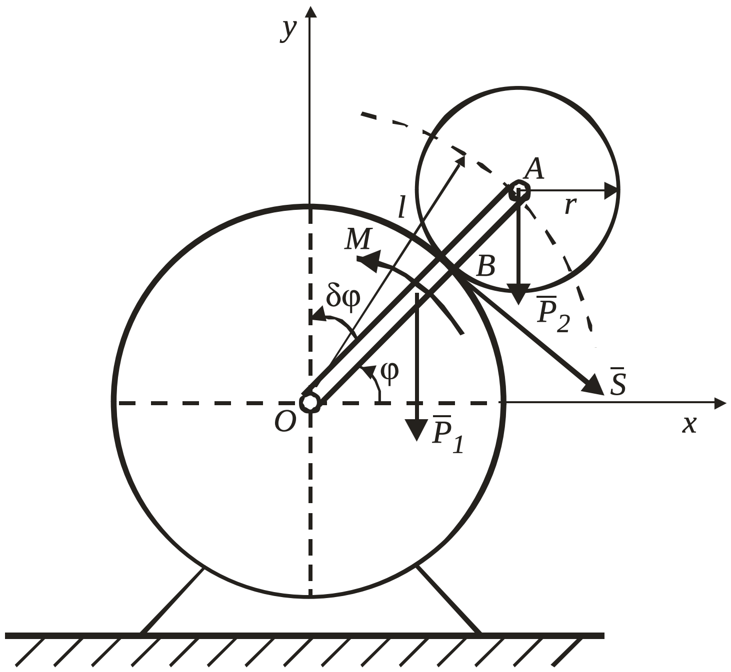


Рисунок 30

Розв’язання

Дана система має один ступінь вільності, тому що положення цієї системи визначається кутом повороту φ кривошипа OA. Цей кут і візьмемо як узагальнену координату, тобто $q_1 = \varphi$. Тоді $\dot{q}_1 = \dot{\varphi} = \omega$, де ω – кутова швидкість кривошипа.

Шукане прискорення кривошипа дорівнює: $\varepsilon = \ddot{q}_1 = \ddot{\varphi}$.

Так як дана система має один ступінь вільності, то для цієї системи необхідно скласти тільки одне рівняння Лагранжа другого роду:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_1.$$

Обчислимо кінетичну енергію системи:

$$T = T_1 + T_2,$$

де T_1 – кінетична енергія кривошипа,

T_2 – кінетична енергія зовнішнього колеса.

Так як кривошип здійснює обертальний рух, а зовнішнє колесо – плоско паралельний, то їх кінетичні енергії:

$$T_1 = \frac{1}{2} J_0 \omega^2, \quad T_2 = \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} V_A^2 + \frac{1}{2} J_A \omega_1^2,$$

де J_0 – момент інерції кривошипа щодо його осі обертання *O*; J_A – момент інерції зовнішнього колеса, щодо його осі *A*; ω_1 – кутова швидкість обертання зовнішнього колеса навколо його осі *A*; V_A – швидкість центра *A* цього колеса.

Кривошип можна розглядати як тонкий однорідний стрижень, а зовнішнє колесо – як суцільний однорідний диск. Тому

$$J_0 = \frac{1}{3} \frac{P_1}{g} l^2; \quad J_A = \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} r^2.$$

Виразимо тепер усі швидкості через узагальнену швидкість $\dot{\varphi} = \omega$.

Так як зовнішнє колесо котиться по нерухомому колесу без ковзання (миттєвий центр швидкостей зовнішнього колеса знаходиться в точці дотику *B*), то

$$V_A = l\omega = r\omega_1$$

і, отже,

$$V_A = l\dot{\varphi}, \quad \omega_1 = \frac{V_A}{r} = \frac{l}{r}\dot{\varphi}.$$

Підставивши всі знайдені значення, знаходимо остаточно:

$$T = \frac{l^2}{12g}\left(2P_1 + 9P_2\right)\dot{\varphi}^2; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{l^2}{6g}\left(2P_1 + 9P_2\right)\dot{\varphi}.$$

Перейдемо тепер до обчислення узагальненої сили Q_1. Для цього надамо кривошипу OA можливого кутового переміщення $\delta\varphi$, спрямованого проти ходу годинникової стрілки.

На дану систему діють сили: $\overline{P}_1$ – вага кривошипа, $\overline{P}_2$ – вага зовнішнього колеса і пара з моментом M. Тому сума робіт цих сил і пари на можливому переміщенні $\delta\varphi$ дорівнює:

$$\delta A = M\,\delta\varphi - P_1\frac{l}{2}\cos\varphi\,\delta\varphi - P_2\,l\cos\varphi\,\delta\varphi.$$

З іншого боку, ту ж елементарну роботу можна визначити так:

$$\delta A = Q_1\,\delta q_1 = Q_1\delta\varphi.$$

Отже

$$Q_1\delta\varphi = \frac{1}{2}\left[2M - \left(P_1 + 2P_2\right)l\cos\varphi\right]\delta\varphi,$$

звідки

$$Q_1 = \frac{1}{2}\left[2M - \left(P_1 + 2P_2\right)l\cos\varphi\right].$$

Після підстановки в рівняння Лагранжа усіх значень одержуємо:

$$\frac{l^2}{6g}(2P_1 + 9P_2)\ddot{\varphi} = \frac{1}{2}\left[2M - (P_1 + 2P_2)l\cos\varphi\right],$$

звідки

$$\varepsilon = \ddot{\varphi} = \frac{3g\left[2M - (P_1 + 2P_2)l\cos\varphi\right]}{l^2(2P_1 + 9P_2)}.$$

Окружне зусилля $\bar{S}$ прикладене до зовнішнього колеса в точці B дотику з нерухомим колесом. Це зусилля викликає стосовно кривошипа обертальний рух зовнішнього колеса. Знайдемо $\bar{S}$ за допомогою теореми про зміну кінетичного моменту у відносному русі зовнішнього колеса стосовно осі A:

$$J_A\varepsilon_1 = M_A(\bar{S})$$

чи

$$\frac{1}{2}\frac{P_2}{g}r^2\varepsilon_1 = Sr.$$

Беручи до уваги, що кутове прискорення ε_1 зовнішнього колеса виражається через прискорення кривошипа $\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$ залежністю

$$\varepsilon_1 = \frac{l}{r}\ddot{\varphi},$$

знаходимо:

$$S = \frac{P_2 l}{2g}\ddot{\varphi} = \frac{3}{2}\frac{P_2\left[2M - (P_1 + 2P_2)l\cos\varphi\right]}{l(2P_1 + 9P_2)}.$$

Приклад 12. *У механізмі фрикційної передачі колесу 2 надається обертання колесом 1, яке має горизонтальну вісь обертання, що проходить через вісь колеса 2 (рис.31). На ведуче колесо 1 діє обертальний момент M_1, а на ведене колесо 2 момент опору M_2. Вага колеса 1 дорівнює P_2, а його радіус – R_2. Колеса вважати однорідними дисками. Відстань від центра O колеса 2 до точки дотику коліс змінюється за законом $R = R(t)$.*

Скласти диференційне рівняння обертання колеса 2.

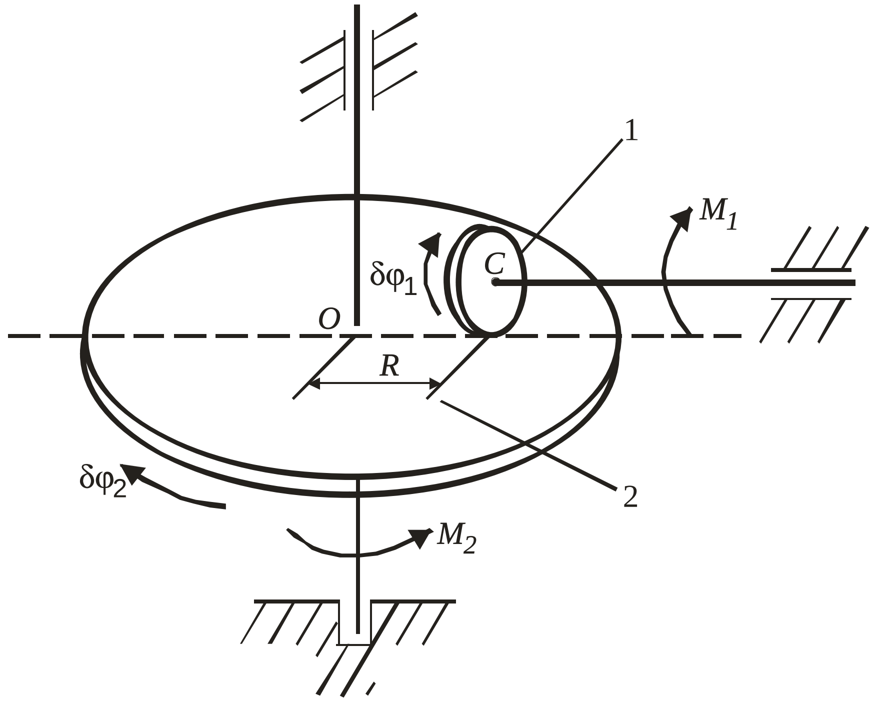


Рисунок 31

Розв’язання

Ця система має одну ступінь вільності; j_1 і j_2 – кути обертання коліс, притому

$$R_1 j_1 = R j_2; \; j_1 = j_2 \frac{R}{R_1}.$$

Кінетична енергія системи складається із кінетичних енергій двох тіл:

$$T = T_1 + T_2,$$

де
$$T_1 = \frac{1}{2}\frac{P_1}{g}V_c^2 + \frac{1}{2}J_1 w_1^2.$$

В останній формулі

$$V_c = \dot{j}R, \text{ а } w_1 = \dot{j}_1.$$

Раніш отримали $\varphi_1 = \dfrac{R}{R_1}\varphi_2$ або після диференціювання

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{R}{R_1}\dot{\varphi}_2 .$$

Крім того, $I_1 = \dfrac{1}{2}\dfrac{P_1}{g}R_1^2$.

Використовуючи вирази для обчислення T_1:

$$T_1 = \frac{1}{2}\frac{P_1}{g}\dot{R}^2 + \frac{1}{4}\frac{P_1}{g}R_2^2\dot{\varphi}_2^2 .$$

Кінетична енергія другого тіла

$$T_2 = \frac{1}{2}I_2 w_2^2 \text{ або } T_2 = \frac{1}{2}I_2\dot{\varphi}_2^2 ,\ I_2 = \frac{1}{2}\frac{P_2}{g}R_2^2 .$$

Таким чином,

$$T_2 = \frac{1}{4}\frac{P_2}{g}R_2^2\dot{\varphi}_2^2 .$$

Формули з T_1 і T_2 підставимо у формулу: $T = T_1 + T_2$:

$$T = \frac{1}{2}\frac{P_1}{g}\dot{R}^2 + \frac{1}{4g}(P_1R^2 + P_2R_2^2)\dot{\varphi}_2^2 .$$

Визначимо похідні від кінетичної енергії:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} = \frac{l}{2g}(P_1R^2 + P_2R_2^2)\dot{\varphi}_2 ,$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi_2}=\frac{1}{2g}(P_1R^2+P_2R_2^2)\ddot\varphi_2+\frac{1}{g}P_1R\dot R\dot\varphi_2;\\&\frac{\partial T}{\partial \varphi_2}=0;\end{aligned}\right\}$$

$$(\sum_i dA_i)\varphi_2=-M_2d\varphi_2+M_1d\varphi_1=(-M_2+\frac{R}{R_1}M_1)d\varphi_2;$$

$$Q\varphi_2=\frac{\left(\sum\limits_i dA_i\right)\varphi_2}{d\varphi_2}=\frac{R}{R_1}M_1-M_2.$$

Складемо рівняння Лагранжа, використовуючи отримані результати:

$$(P_1R^2+P_2R_2^2)\ddot\varphi_2+2P_1R\dot R\dot\varphi_2=2g(\frac{R}{R_1}M_1-M_2).$$

Якщо припустити, що $R=R_0=const$, то

$$\varepsilon_2=\ddot\varphi=\frac{2g(R_0M_1-R_1M_2)}{R_1(P_1R_0^2+P_2R_2^2)}.$$

Приклад 13. *На гладкій горизонтальній площині розташована трикутна призма АВС масою m_1, яка може ковзати без тертя. По грані АВ призми котиться без ковзання однорідний круглий циліндр масою m_2 (рис.32). Визначити прискорення призми.*

Розв’язання

Механічна система “призма-циліндр” має два ступеня вільності. Введемо дві узагальнені координати: x і y. Тоді $\dot x$ і $\dot y$ – узагальнені швидкості призми і центра циліндра відповідно. Кінетична енергія системи визначається сумою

$$T=T_1+T_2,$$

де

$$T_1 = \frac{1}{2}\frac{P_1}{g}\dot{x}_1^2;$$

$$T_2 = \frac{1}{2}\frac{P_2}{g}V_0^2 + \frac{1}{2}I_0 w^2,$$

де

$$\overline{V_0} = \overline{V}_e + \overline{V}_r = \dot{x} + \dot{y}.$$

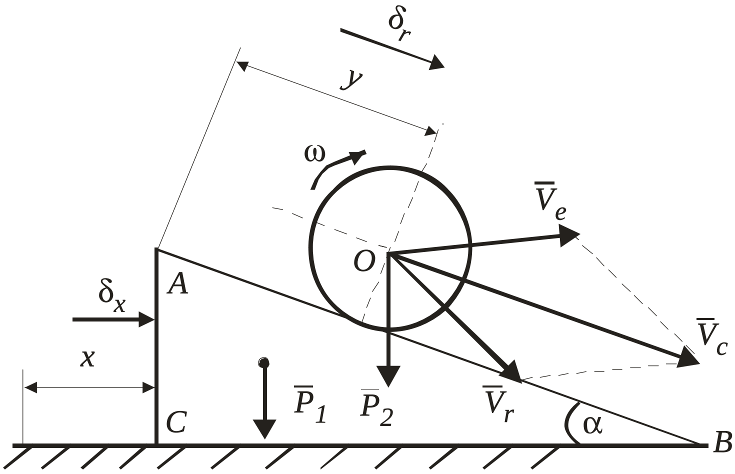


Рисунок 32

Відповідно до наведених формул і рисунка 33 маємо:

$$V_0^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}\cos a;$$

$$w = \frac{\dot{y}}{R},$$

де R – радіус циліндра.

$$I_0 = \frac{1}{2}\frac{P_2}{g}R^2,$$

де I_0 – момент інерції циліндра відносно його осі O.

Таким чином, вираз набуде вигляду

$$T_2 = \frac{1}{2}\frac{P_2}{g}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}\cos\alpha) + \frac{1}{4}\frac{P_2}{g}\dot{y}^2 .$$

Використовуючи отримані результати запишемо кінцевий вираз кінетичного моменту

$$T = \frac{1}{2}\frac{P_1}{g}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{P_2}{g}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}\cos\alpha) + \frac{1}{4}\frac{P_2}{g}\dot{y} .$$

Визначимо ліві частини рівнянь Лагранжа:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{P_1 + P_2}{g}\dot{x} + \frac{P_2}{g}\dot{y}\cos\alpha \ ,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{P_1 + P_2}{g}\ddot{x} + \frac{P_2}{g}\cos\alpha \cdot \ddot{y},$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 .$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = \frac{P_2}{g}(\dot{x}\cos\alpha + \frac{3}{2}\dot{y}),$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = \frac{P_2}{g}(\ddot{x}\cos\alpha + \frac{3}{2}\ddot{y}),$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 .$$

Визначимо узагальнені сили.

Для знаходження Q_x дамо системі можливе переміщення dx. Тоді

$$(\sum_i dA_i)_x = (P_1 + P_2)\cos\frac{\pi}{2}dx = 0 .$$

З цього випливає $Q_x = 0$.

Дамо можливе переміщення осі циліндра dy по грані призми *AB*.

Тоді

$$(\sum_i dA_i)_y = P_2 \sin\alpha\, dy .$$

З цього випливає

$$Q_y = P_2 \sin\alpha .$$

Складемо рівняння Лагранжа:

$$\frac{P_1 + P_2}{g}\ddot{x} + \frac{P_2}{g}\cos\alpha \cdot \ddot{y} = 0 ,$$

$$\frac{P_2}{g}(\ddot{x}\cos\alpha + \frac{3}{2}\ddot{y}) = P_2 \sin\alpha .$$

З останніх рівнянь знаходимо прискорення призми a_1, домноживши перше рівняння на $\frac{3}{2}$, а друге на $\cos\alpha$, і додаючи їх, отримаємо:

$$a_1 = \ddot{x} = -\frac{P_2 g \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\frac{3}{2}(P_1 + P_2) - P_2\cos^2\alpha} ,$$

$a_1 = \ddot{x} = \dfrac{P_2 g \sin 2\alpha}{3(P_1 + P_2) - 2P_2\cos^2\alpha}$ – це і є шукане прискорення призми.

Приклад 14. *Механічна система складається з обмотаних нитками блоків 2 і 3 і приєднаних до них вантажу 1 і циліндра 4. Система рухається у вертикальній площині під дією заданих сил.*

Визначити a_1 *- прискорення вантажу 1 (рис.33).*

Дано: $M_1=5m$; $M_2=2m$; $M_3=3m$; $M_4=m=1кг$; $r_2=1м$; $R_3=3м$; $r_4=3м$; $r_2{:}R_2=1{:}4$, $R_3{:}r_3=3{:}1$; $r_2=2м$; $r_3=3м$; $r_4=4м$; $f=0,1$; $f_k=0,2$; $a=30°$; $b=60°$.

Знайти: a_1 *- (прискорення тіла 1).*

Розв'язання

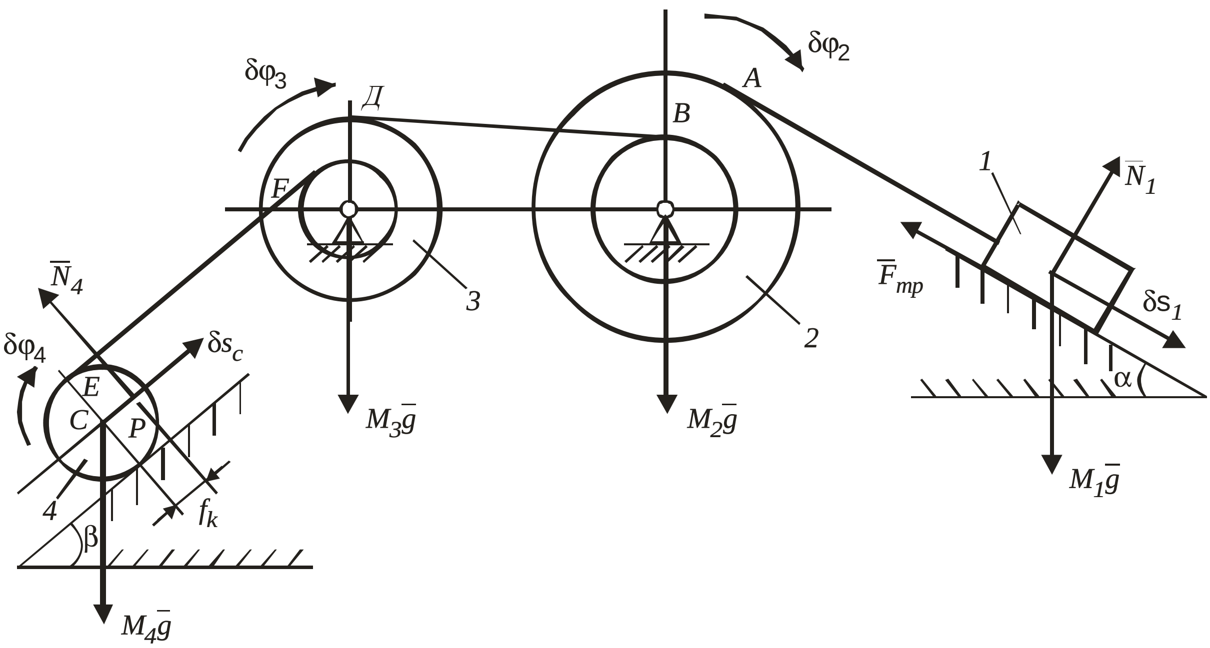


Рисунок 33

До заданої механічної системи застосуємо рівняння Лагранжа 2-го роду:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i .$$

1) Система має один ступінь вільності, отже рівняння буде одне. Зобразимо на рисунку 34 активні сили: $M_1\overline{g}$, $\overline{N}_1$, $\overline{F}_{тр}$, $M_2\overline{g}$, $M_3\overline{g}$, $M_4\overline{g}$, $\overline{N}_4$. З них роботу не будуть здійснювати сили $\overline{N}_1$, $M_2\overline{g}$, $M_3\overline{g}$ ($\overline{N}_1$

перпендикулярна до переміщення; $M_2\bar{g}$ і $M_3\bar{g}$ прикладені у нерухомих точках).

Приймемо за узагальнену координату переміщення вниз тіла 1 вздовж нахиленої площини: q=s_1, і дамо цій координаті приріст (а системі – можливе переміщення).

Тіло 1 зрушилось на ds_1, тіла 2 та 3 здійснили обертання на dj_2 і dj_3 відповідно, тіло 4 – на dj_4, і його центр ваги C зрушився на ds_C.

2) Тоді рівняння Лагранжа буде мати вигляд:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial s_1} - \frac{\partial T}{\partial s_1} = Q_1.$$

Знайдемо узагальнену силу:

$$Q = \frac{\sum dA_k}{ds_1};$$

$$\sum dA_k = M_1 g \sin a ds_1 - fM_1 g \cos a ds_1 - M_4 f_k g \cos b dj_4 - M_4 g \sin b ds_c$$

$$dj_2 = \frac{ds_1}{R_2};\ dj_3 = \frac{ds_1}{R_3};$$

Тому що $w_2 r_2 = w_3 r_3$, $w_3 = \frac{w_2 r_2}{R_3} = \frac{V_1 r_2}{R_2 R_3}$,

згідно з умовою задачі $\frac{R_2}{r_2} = 4$,

тоді $$w_3 = \frac{w_2}{4R_3};\ dj_4 = \frac{ds_1}{24};\ dS_c = \frac{ds_1}{24}.$$

Підставивши вирази для можливих переміщень через ds_1 та розділивши $\sum dA_k$ на ds_1, отримаємо:

$$Q = M_1 g(\sin a - f\cos a) - M_4 g(f_k \cos b / r_4 + \sin b).$$

3) Знайдемо повну кінетичну енергію системи:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4;$$

$$T_1 = \frac{1}{2} M_1 V_1^2 = \frac{1}{2} M_1 \dot{s}_1^2$$

оскільки тіло 1 рухається поступально,

$$T_2 = \frac{1}{2} J_2 w_2^2 = M_2 r_2^2 \dot{s}_1^2 / 2R_2^2; \; T_3 = \frac{1}{2} J_3 w_3^2 = M_3 r_3^2 \dot{s}_1^2 / 32R_3^2;$$

оскільки тіла 2 і 3 обертаються,

$$T_4 = \frac{1}{2} M_4 V_c{}^2 + \frac{1}{2} J_c w_4{}^2 = \frac{1}{2} M_4 \dot{s}_1{}^2 (1 + r_4{}^2 / r_4^2)/(24)^2;$$

тіло 4 здійснює плоский рух, отже

$$T = \frac{1}{2} M_1 \dot{s}_1^2 + M_2 r_2^2 \dot{s}_1^2 / 2R_2^2 + M_3 r_3^2 \dot{s}_1^2 / 32R_3^2 + M_4 \dot{s}_1^2 (1 + r_4^2 / r_4^2)/2(24)^2 =$$

$$= \dot{s}_1^2 \left(\frac{1}{2} M_1 + M_2 r_2^2 / 2R_2^2 + M_3 r_3{}^2 / 32R_3^2 + \frac{1}{2} M_4 (1 + r_4^2 / r_4^2)/(24)^2\right).$$

Позначимо

$$W = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} M_1 + M_2 r_2^2 / 2R_2^2 + M_3 r_3^2 / 32R_3^2 + \frac{1}{2} M_4 (1 + r_4^2 / r_4^2)/(24)^2\right).$$

Знайдемо похідні від кінетичної енергії:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_1} = \dot{s}_1 W; \; \frac{d(\dot{s}_1 W)}{dt} = W \ddot{s}_1; \; \frac{\partial T}{\partial s_1} = 0.$$

4) Підставимо значення узагальненої сили та похідних в рівняння Лагранжа:

$$W\ddot{S}_1 = M_1 g(\sin a - f\cos a) - \frac{1}{24}M_4 g(f_k \cos b / r_4 + \sin b).$$

Звідси

$$a_1 = \frac{M_1 g(\sin a - f\cos a) - \dfrac{1}{24}M_4 g\left(\dfrac{f_k \cos b}{r_4} + \sin b\right)}{M_1 + \dfrac{M_2 r_2^2}{R_2^2} + \dfrac{M_3 r^2{}_3}{16R_3^2} + \dfrac{1}{24^2}M_4\left(1 + \dfrac{r_4^3}{r_4^2}\right)}.$$

Підставимо значення:

$$a_1 = \frac{5\cdot 9{,}8(\sin 30° - 0{,}1\cdot\cos 30°) - \dfrac{1}{24}9{,}8\left(0{,}2\cdot\dfrac{1}{3}\cos 60° + \sin 60°\right)}{5 + \dfrac{2\cdot 2^2}{4^2} + \dfrac{3\cdot 3^2}{16\cdot 6^2} + \dfrac{1}{24}\left(1 + \dfrac{4^2}{3^2}\right)},$$

$$a_1 = \frac{20{,}26 - 0{,}37}{5 + 0{,}5 + 0{,}05 + 0{,}005} = 3{,}6 \text{ м/с}^2.$$

Розв’язок: $a_1 = 3{,}6$ м/с^2.

12 ЗАСТОСУВАННЯ РІВНЯНЬ ЛАГРАНЖА ДРУГОГО РОДУ ДО ВИВЧЕННЯ МАЛИХ КОЛИВАНЬ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

У теорії малих коливань механічних систем значну роль відіграють рівняння Лагранжа, придатні до вивчення коливальних рухів і теорії коливань в цілому.

Теорія коливань, почавши свій розвиток з дослідження руху математичного маятника, перетворилася в один із самих розвинених розділів теоретичної механіки з досить складним математичним апаратом.

Розглянемо малі коливання механічних систем за одним й двома ступенями вільності на основі застосування рівнянь Лагранжа. Механічна система може здійснювати малі коливання поблизу стійкого положення рівноваги. Узагальнені координати системи в положенні рівноваги дорівнюють нулю. Тоді коливальним рухом механічної системи в загальному випадку вважають усякий її рух, при якому всі узагальнені координати або частина з них змінюються не монотонно, а мають коливальний характер, тобто набувають нульових значень, принаймні, декілька разів.

Для розгляду малих коливань необхідно дати визначення стійкості положення рівноваги системи і встановити умови, за яких положення рівноваги буде стійким.

12.1 Поняття про стійкість рівноваги механічної системи

Стан спокою механічної системи може бути стійким, нестійким і байдужим.

Рівновага називається стійкою, якщо система, виведена з положення спокою, здійснює коливання біля цього положення (для наочності на рисунку 34 наведені приклади).

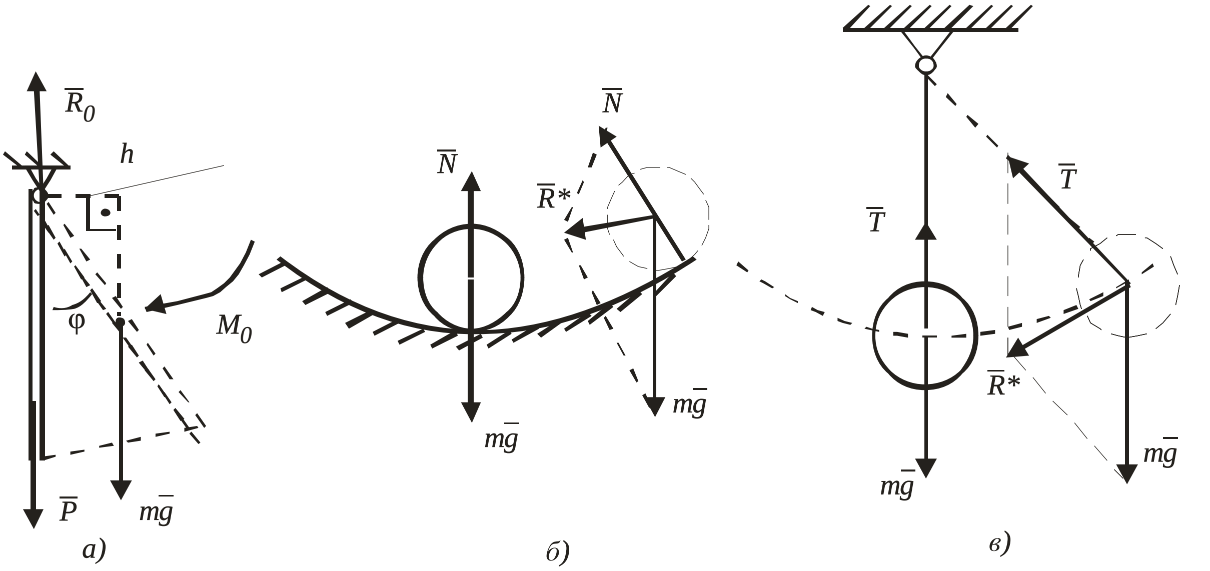


Рисунок 34

Так стрижень (рис.34, а), виведений із стану рівноваги, момент сили $m\overline{g}$ $(M_0 = mg \cdot h)$ повертає до попереднього стану. У прикладах з кулькою до попереднього стану рівноваги кульку повертає рівнодіюча сила $\overline{R}^*$(для рис.34,б $\overline{R}^* = \overline{N} + m\overline{g}$; а для рис.35,в: $\overline{R}^* = m\overline{g} + \overline{T}$). Але стрижнь може мати стан рівноваги і в іншому положенні, не лише, коли $\varphi = 0$ (див.рис.34, а), а і тоді коли $\varphi = 180°$ (рис.35).

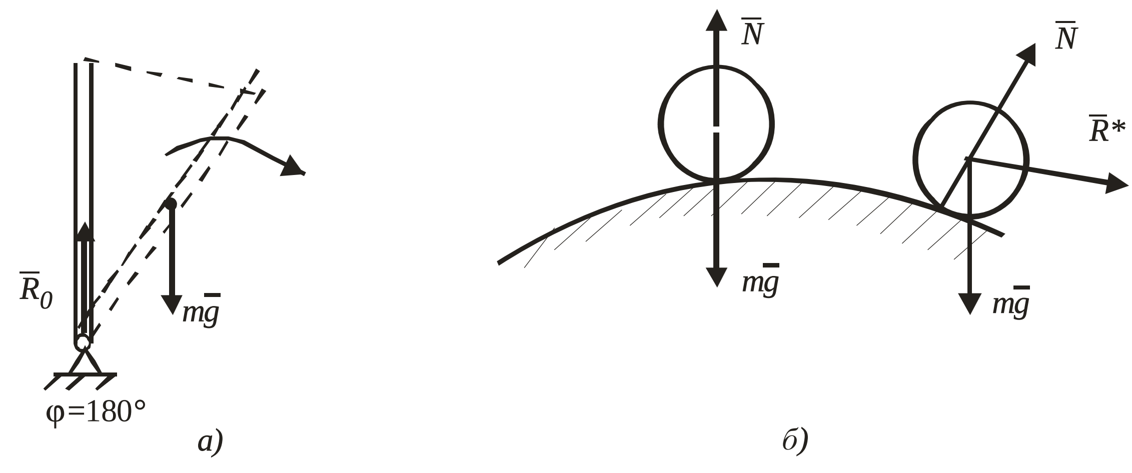


Рисунок 35

Але при $\varphi = 180°$ сили, що діють на стрижень (момент сили $m\overline{g}$) намагаються відхилити стрижень від положення рівноваги і не дозволять стрижню повернутися в попередній стан рівноваги. Теж саме можна бачити і в прикладі з кулькою (рис.35, б), коли рівнодіюча сила все більш віддаляє кульку від стану рівноваги. Тому положення, зображене на рисунку 35, називають положенням **нестійкої рівноваги.** Тоді, як на рисунку 34 рівновага тіл є *стійкою*.

Можливий ще один випадок, зображений на рисунку 36, коли стрижень і кулька можуть постійно перебувати у стані рівноваги.

Такий стан рівноваги називають байдужим.

У наведеному прикладі закріплена точка *O* стрижня співпадає з його центром мас. У цьому випадку сили, прикладені до стрижня, утворюють урівноважену систему сил при довільно початковім відхилені його від попереднього (початкового) положення рівноваги.

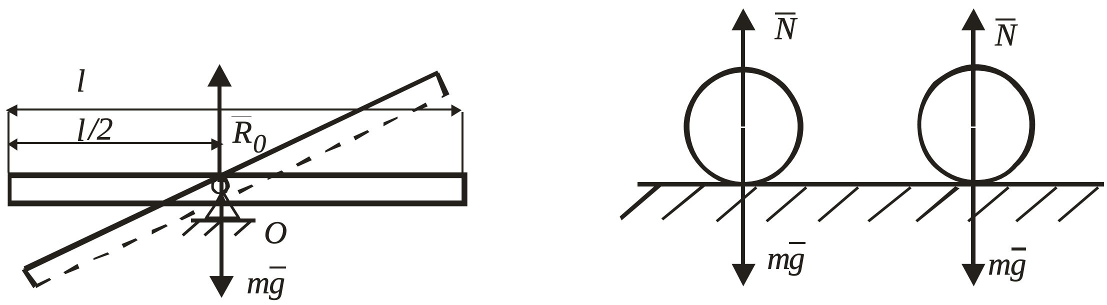


Рисунок 36

У загальному випадку, крім початкового відхилення, стрижню слід надати також досить малої початкової кутової швидкості. Тоді випадок байдужої рівноваги стрижня треба буде віднести до випадку нестійкої рівноваги, бо, отримавши будь-яку малу початкову швидкість, стрижень буде віддалятися з цією кутовою швидкістю за інерцією від свого початкового положення рівноваги.

Усе вищесказане про положення рівноваги стрижня характерне не лише для будь-якого твердого тіла, але і для будь-якої механічної системи, бо в такому положенні рівноваги тіло (чи система) може перебувати досить довго, якщо йому не надається будь-яке збурення.

При стійкому положенні рівноваги система, яка виведена з положення рівноваги досить малими збудженнями у вигляді початкових відхилень і швидкостей, котрі надаються всім точкам системи, або їх частині, здійснюють коливання навколо положення рівноваги або наближаються до нього без коливань.

При нестійкому положенні рівноваги випадки збудження приводять до того, що система при подальшому русі все далі і далі відхиляється від положення рівноваги.

Таким чином, насамперед, необхідно встановити характер положення рівноваги системи. Для цього потрібно ввести точне поняття стійкості положення рівноваги механічної системи.

Строге визначення цього поняття було надане в кінці XIX століття російським вченим Ляпуновим. Наведемо це визначення для системи з будь-яким скінченим числом ступенів вільності n.

Домовимося: узагальнені координати $q_1, q_2, ..., q_n$ відраховувати від положення рівноваги системи, тобто приймати їх рівними нулю в положенні рівноваги. Початкове збурювання системи складається в загальному випадку з початкових значень узагальнених координат $q_1^0, q_2^0, ..., q_n^0$ і початкових узагальнених швидкостей $\dot{q}_1^0, \dot{q}_2^0, ..., \dot{q}_n^0$.

За Ляпуновим, *рівновага системи називається стійкою, якщо для будь-якого досить малого додатного числа* e *можна вибрати два інших таких малих додатних числа* h_1 *і* h_2*, і, якщо при початкових збуреннях вони задовольняють умовам* $\left|q_i^0\right| < h_1, \left|\dot{q}_i^0\right| < h_2$*, то при подальшому русі механічної системи виконуються умови* $\left|q_i(t)\right| < e$ *для кожної узагальненої координати.*

Тобто, положення рівноваги вважається стійким, якщо можна задати досить малу область зміни початкових значень узагальнених координат й область початкових узагальнених швидкостей, для яких величини узагальнених координат при наступному русі системи обмежені заданою e.

У положенні рівноваги механічної системи кожна узагальнена сила Q_i дорівнює нулю. Для випадку потенційного силового поля узагальнені сили через потенційну енергію обчислюються за формулами:

$$Q_i = -\frac{d\Pi}{dq_i}, \qquad i = 1,2,...,n, \tag{62}$$

отже у положенні будь-якої рівноваги $\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0$, тому потенціальна енергія при цьому може досягти свого екстремального значення.

Достатню ознаку стійкості рівноваги системи визначає наступна теорема.

12.2 Теорема Лагранжа-Діріхле

Для стійкості положення рівноваги системи, яка підпорядкована голономним, ідеальним, стаціонарним і не звільняючим в'язям і знаходиться в стаціонарному потенціальному силовому полі, достатньо, щоб потенціальна енергія в положенні рівноваги мала ізольований відносний мінімум.

Щоб довести теорему, зробимо такі припущення. Припустимо, що всі узагальнені координати системи в положенні рівноваги дорівнюють нулю, тобто узагальнені координати q_i відлічуємо від положення рівноваги. Беручи до уваги співвідношення (62) та формулу

$$\Pi = -\int dA + C, \tag{63}$$

вибираємо *C* так, щоб у положенні рівноваги потенціальна енергія системи дорівнювала нулю:

$$\Pi(0,0,\ldots,0) = 0. \tag{64}$$

Оскільки в положенні рівноваги система П має мінімум, то можна вказати такий окіл цього положення, в якому потенціальна енергія додатна. При цьому зростанню q_i відповідає зростання П. За деяких значень це зростання припиняється – потенціальна енергія при подальшому збільшенні q_i або спадає, або зберігається сталою.

Сукупність q_i, якій відповідає $\Pi(q_i)$, – додатна зростаюча функція, називається *областю мінімуму потенціальної енергії*. Сукупність h_i, за яких зростання $\Pi(q_i)$ зупиняється, називається *межею області мінімуму потенціальної енергії*. На рисунку 38 область мінімуму потенціальної енергії системи розташована між точками h_{1i} і h_{2i}.

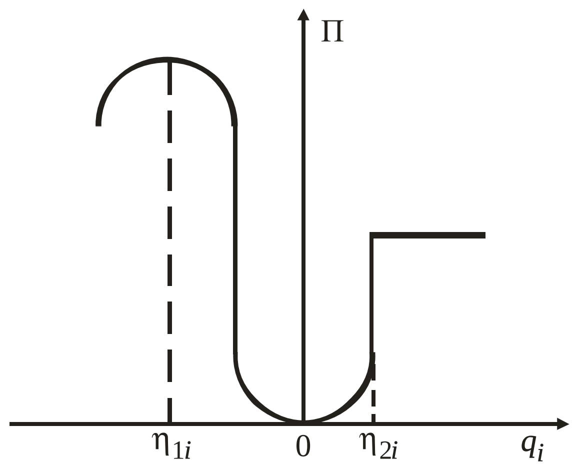


Рисунок 37

Припустимо, що під час руху системи в області мінімуму П, одна з узагальнених координат набирає граничного значення h_i. Побудуємо таку сукупність значень потенціальної енергії системи:

$$\Pi_1 = \Pi(q_1, q_2, ..., q_{h-1}, q_h);$$
$$\Pi_2 = \Pi(q_1, r_2, ..., q_{h-1}, q_h);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Pi_s = \Pi(q_1, q_2, ..., q_{h-1}, q_h).$$

З цієї сукупності вибираємо найменше значення:

$$A = \min \Pi_i (i = 1,2,...,n). \tag{65}$$

Звідси випливає, що система не вийде з області мінімуму потенціальної енергії, якщо її потенціальна енергія при цьому не перевищує значення *A*.

Розглянута система консервативна, тому до неї застосовується закон збереження повної механічної енергії системи:

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0, \tag{66}$$

де $T_{0,}\Pi_0; T, \Pi$ – кінетична та потенціальна енергія системи відповідно в початковий момент часу та в подальшому русі. З рівнянь (66) випливає: $T = T_0 + \Pi_0 - \Pi > 0$. На підставі цього співвідношення дійдемо висновку, що

$$\Pi < T_0 + \Pi_0. \tag{67}$$

Вибираємо початкові умови так, щоб $T_0 + \Pi_0 = A$. Тоді співвідношення набирає вигляду

$$\Pi < A. \tag{68}$$

Звідси випливає, що потенціальна енергія системи в подальшому русі не перевищує значення, за межі якого вона не виходить з області мінімуму потенціальної енергії. І отже, рівновага системи згідно з визначенням буде стійкою.

Теорему Лагранжа-Діріхле доведено. Вона, як зазначено раніше, вказує на достатню ознаку стійкості рівноваги і не припускає оберненості.

Відсутність теореми, що вказує на необхідну ознаку стійкості рівноваги, частково компенсується двома теоремами Ляпунова про нестійкість рівноваги. Щоб розглянути зміст теореми Ляпунова, розкладемо потенціальну енергію системи у ряд Маклорена в околі положення рівноваги, припускаючи, що функція $\Pi(q_1, q_2, ..., q_h)$ неперервна і має похідні в положенні рівноваги:

$$\Pi(q_1, q_2, ..., q_h) = \Pi(0,0,...,0) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \right)_0 q_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_k} \right)_0 q_i q_k + ...$$

Тут перший доданок перетворюється на нуль на підставі рівності (64), друга група доданків – на підставі рівності (62).

Тоді

$$\Pi(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_k}\right)_0 q_i q_k + \ldots \qquad (69)$$

Наведемо теореми Ляпунова без доведення.

1 *Якщо в положенні рівноваги системи потенціальна енергія не має мінімуму та його відсутність виявляється з розгляду членів другого порядку відносно узагальнених координат у розкладі* ***(69)****, то це положення рівноваги* ***нестійке.***

Може бути, що члени другого порядку відносно узагальнених координат не входять до розкладу (69) або з їх розгляду неможливо встановити відсутність мінімуму потенціальної енергії. У цьому перша теорема Ляпунова не має місця. Тоді звертаються до другої теореми Ляпунова.

2 Якщо в положенні рівноваги системи потенціальна енергія має максимум та його наявність виявляється з розгляду членів найменш високого порядку відносно узагальнених координат, що входять до розгляду (69), то стан рівноваги нестійкий.

Досвід свідчить, що більшість випадків практики задовольняють вимоги або теореми Лагранжа-Діріхле, або теорем Ляпунова.

12.3 Загальні відомості про коливання системи

Розглянемо механічну систему з n ступенями вільності. У загальному випадку рух системи описується n рівняннями Лагранжа

$$\frac{\partial}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{q}_i}\right) - \frac{dT}{dq_i} = Q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

причому кожна з узагальнених сил у загальному випадку складається із трьох складових:

$$Q_j = Q_j^{\Pi} + Q_j^{\Phi} + Q_j^{B},$$

де Q_j^{Π} – частина узагальненої сили, отриманої від дії потенціальних сил,

$$Q_j^{\Pi} = \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}.$$

Потенціальна енергія в загальному випадку залежить від координат точок системи (q_i) і не залежить від узагальнених швидкостей ($\dot{q}_i$). Для нестаціонарного силового поля, а також нестаціонарних в'язей потенціальна енергія може залежати явно ще й від часу.

Q_i^{Φ} – узагальнені сили, пов'язані з дією сил опору, що залежать як від числових значень, так і від напрямків швидкостей точок системи. Розглянемо випадок лінійного опору, коли сили опору пропорційні швидкостям точок і спрямовані протилежно швидкостям.

Сили Q_j^{B} – це ті, що змушують, або збурюють коливання. Вони залежать, насамперед, від часу.

Обмежимося випадком гармонічної сили, що збурює коливання, тобто, коли Q_j^{B} змінюється із часом за синусоїдальним законом.

Отже, у загальному випадку рівняння Лагранжа мають вигляд:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i^{\Pi} + Q_i^{\Phi} + Q_i^{\mathrm{B}}, \qquad (i = 1, 2, ..., n).$$

12.4 Власні лінійні коливання системи

Розглянемо розв'язання задач коливання системи з одним ступенем вільності (n=1) під дією одних потенційних сил, тобто коли $Q = Q_j^{\Pi} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q}$. Вважаємо, що сил опору і сил, що збурюють коливання, немає $Q^{\Phi} = 0$ ($Q^{\mathrm{B}} = 0$). Такі коливання називаються власними або вільними.

Нехай система, на яку накладені голономні, ідеальні, не звільняючі і стаціонарні в'язі, складається з N точок і рухається поблизу положення рівноваги. Її кінетична енергія

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \bar{V}_k^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \dot{\bar{r}}_k^2 .$$

Радіус-вектор кожної точки системи залежить від часу лише через узагальнену координату q, тобто

$$\dot{\bar{r}}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q}\dot{q} .$$

Тоді, підставляючи це значення у вираз кінетичної енергії, отримаємо:

$$T = \frac{1}{2}A\dot{q}^2, \text{ де } A = \sum_{k=1}^{N} m_k \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q}\right)^2 .$$

Величина A залежить тільки від q і не залежить від $\dot{q}$.

Розкладаючи $A(q)$ в околиці q=0 у степний ряд, маємо:

$$A(q) = A_0 + \left(\frac{\partial A}{\partial q}\right)_0 q + \left(\frac{\partial^2 A}{\partial q^2}\right)_0 \frac{q^2}{2} + \ldots .$$

Тут і далі індекс 0 означає, що відповідні величини необхідно обчислювати при q=0.

Вираз для кінетичної енергії набуде вигляду (якщо відкинути доданки третього і більш високих порядків):

$$T = \frac{1}{2}\left[A_0 + \left(\frac{\partial A}{\partial q}\right)_0 q + \ldots\right]\dot{q}^2 .$$

Для того, щоб зберегти члени не вище другого порядку, відкинемо всі доданки у квадратній дужці, починаючи із другого, і введемо позначення $a=A_0$.

$$T=\frac{1}{2}a\dot{q}^2. \tag{70}$$

Додатна стала величина a називається коефіцієнтом інерції. Звичайно за розмірністю коефіцієнт інерції є масою або моментом інерції.

Потенціальна енергія П для стаціонарного силового поля *і* стаціонарних в'язей є функцією тільки q. Розкладаючи її в степний ряд в околиці q=0, одержуємо:

$$\Pi(q)=\Pi_0+\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q}\right)_0 q+\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_0 \frac{q^2}{2}+\dots.$$

У положенні рівноваги при q=0 потенціальна енергія $\Pi_0=0$.

Величина $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q}\right)_0=Q$. У положенні рівноваги узагальнена сила Q=0.

Будемо вважати, що в положенні рівноваги потенціальна енергія має мінімум. Це достатня умова стійкості положення рівноваги системи. У цьому випадку $\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)$– величина додатна. Позначимо її через c. Сталу величину c називають жорсткістю. Відкинемо доданки третього і більш високих порядків.

Тоді

$$\Pi(q)=\frac{1}{2}cq^2. \tag{71}$$

Системи, для яких кінетична енергія T і потенціальна енергія П визначаються за формулами (70) і (71), називаються лінійними. Для них вся математична теорія є такою ж, як і для систем, що здійснюють малі коливання, хоча коливання для лінійних систем можуть бути будь-якими, не обов’язково малими. Надалі розглядаються лінійні коливання, до яких входять малі коливання.

На підставі формул (70) і (71) маємо:

$$\frac{\partial T}{\partial q}=0\,;\ \frac{\partial T}{\partial \dot q}=a\dot q\,;\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q}=a\ddot q\,;\ \frac{\partial \Pi}{\partial q}=cq\,.$$

Підставляючи ці значення в рівняння Лагранжа, одержимо диференціальне рівняння малих власних коливань системи з одним ступенем вільності:

$$a\ddot q+cq=0\,. \tag{72}$$

Позначимо $c/a=k^2$, тоді

$$\ddot q+k^2q=0\,, \tag{73}$$

де $k=\sqrt{c/a}$ називається круговою (циклічною) частотою коливань.

Кругова частота виражається в тих же одиницях, що й кутова швидкість, тобто в секундах у мінус першому ступені ($с^{-1}$).

Диференціальне рівняння (72) є однорідним лінійним рівнянням другого порядку з постійними коефіцієнтами. Його рішення можна шукати у вигляді $q=e^{lt}$. Його характеристичне рівняння

$$l^2+k^2=0\,.$$

Рішення якого:

$$l_{1,2}=\pm ki\,.$$

На підставі теорії диференціальних рівнянь рішення рівняння (73) можна подати у вигляді:

$$q=C_1\cos kt+C_2\sin kt\,, \tag{74}$$

і для узагальненої швидкості

$$\dot{q} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \qquad (75)$$

З початкових умов t=0, $q = q_0$, $\dot{q} = \dot{q}_0$ одержуємо: $C_1 = q_0$; $C_2 = \dot{q}_0 / k$.

Маємо:

$$q = q_0 \cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin kt. \qquad (76)$$

Розв’язання рівняння (76) може бути також подано в іншій, амплітудній формі:

$$q = A\sin(kt + \alpha) = A\sin\alpha \cos kt + A\cos\alpha \sin kt,$$

$$C_2 = A\sin\alpha;\ C_2 = A\cos\alpha.$$

Звідси

$$A = \sqrt{C_1 + C_2};\ \sin\alpha = \frac{C_1}{A};\ \cos\alpha = \frac{C_2}{A};\ tg\alpha = \frac{C_1}{C_2}, \qquad (77)$$

або

$$A = \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{\dot{q}_0}{k}\right)^2};\quad \sin\alpha = \frac{q_0}{A};\quad \cos\alpha = \frac{\dot{q}_0}{Ak};\quad tg\alpha = \frac{q_0 k}{\dot{q}_0}, \qquad (78)$$

де A – амплітуда коливань. Вона визначає найбільше відхилення узагальненої координати від положення рівноваги, яке відповідає значенню q=0. Координата q змінюється у межах від $+A$ до $-A$;

α – початкова фаза коливань (при t=0); змінюється в межах від 0 до 2π; $(kt + \alpha)$– фаза коливань.

Система здійснює гармонійні коливання. Гармонійними називаються такі коливання, при яких узагальнена координата змінюється із часом за законом синуса або косинуса.

Період коливання $T = \frac{2p}{k}$.

Частота коливань $n = \frac{1}{T}$.

Кругова частота $k = \frac{2p}{T} = 2pn$; k – це кількість коливань за час, який дорівнює $2p$ с.

На рисунку 38 зображений графік власних гармонійних коливань системи з одним степенем вільності – це синусоїда.

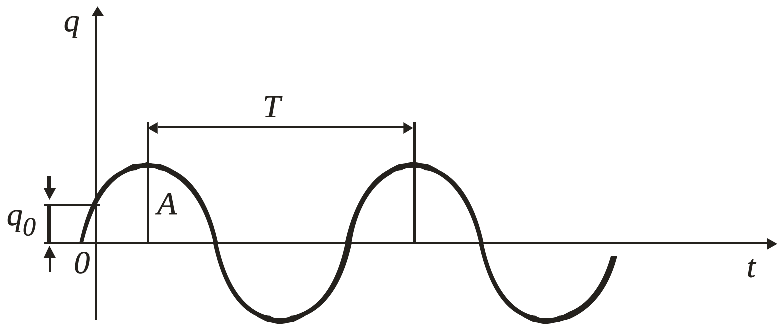


Рисунок 38

Гармонійні коливання повністю визначаються амплітудою, періодом і початковою фазою.

Основні властивості власних лінійних коливань:

1 За характером власні лінійні коливання являються гармонійними.

2 Амплітуда власних коливань – величина стала, обумовлена початковими умовами.

3 Період власних коливань теж є величина стала, яка не залежить від амплітуди і початкових умов.

Величина періоду визначається тільки властивостями коливної системи, тобто коефіцієнтом інерції *a* і коефіцієнтом жорсткості *c*. Незалежність періоду коливань від амплітуди називається ізохронністю коливань. Власні лінійні коливання, якщо немає сил, що їх збурюють, можуть виникати тільки за початкових умов, які не дорівнюють нулю, тобто коли в початковий момент система має початкову узагальнену координату q_0 яка не дорівнює нулю або початкову узагальнену швидкість $\dot{q}_0$.

Приклад 15. *Вантаж вагою* $\overline{P}$ *підвішений на пружині (рис.39). Статичне подовження пружини під дією сили ваги* l_{cm}, *початкове подовження пружини* Δl, *початкова швидкість вантажу* V_0. *Визначити рух вантажу.*

Розв’язання

Розглянемо рух механічної системи, що складається з вантажу. Оберемо $g = x$, так як вантаж буде рухатися прямолінійно. Направимо вісь Ox вертикально вниз вздовж траєкторії руху вантажу. За початок відліку відстані x виберемо положення статичної рівноваги вантажу, при якому сила ваги $\overline{P}$ врівноважується силою пружності пружини $\overline{F}$.

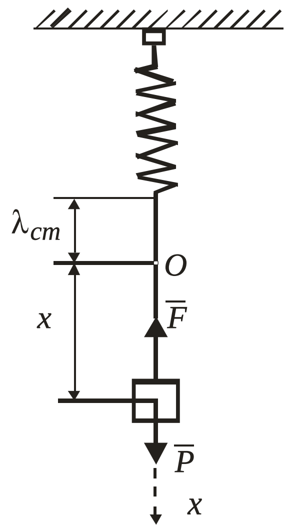


Рисунок 39

Силу пружності пружини вважаємо пропорційною її подовженню з недеформованого стану.

Нехай вантаж у момент t перебуває на відстані x від початку відліку. На нього діють дві сили: сила ваги $\overline{P}$ й сила пружності $\overline{F}$, причому

$$F = c\left(l_{cm} + x\right),$$

де $\left(l_{cm} + x\right)$ – подовження пружини;

c – коефіцієнт жорсткості.

У положенні статичної рівноваги x=0 й $F = c\,l_{cm} = P$. Отже, $c = \dfrac{P}{l_{cm}}$.

Диференціальне рівняння прямолінійного руху вантажу має вигляд:

$$m\ddot{x} = \sum_{k=1}^{N} F_{kx} .$$

Але

$$\sum_{k=1}^{N} F_{kx} = P - F = P - c\left(l_{cm} + x\right) = \left(P - c\,l_{cm}\right) - cx = -cx,$$

отже

$$m\ddot{x} = -cx; \quad \ddot{x} + k^2 x = 0; \quad k = \sqrt{c/m} .$$

Рішення диференціального рівняння:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad V = \dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt .$$

При $t = 0 \quad x_0 = \Delta l - l_{cm}; \quad \dot{x}_0 = V_0$.

Тоді

$$C_1 = x_0; \quad C_2 = V_0 / k ,$$

$$k = \sqrt{c/m} = \sqrt{\frac{cg}{P}} = \sqrt{\frac{Pg}{l_{cm} P}} = \sqrt{\frac{g}{l_{cm}}}; \quad C_2 = V_0 \sqrt{\frac{l_{cm}}{g}} .$$

Рівняння руху вантажу має вигляд:

$$x = \left(\Delta l - l_{cm}\right) \cos \sqrt{\frac{g}{l_{cm}}} t + V_0 \sqrt{\frac{l_{cm}}{g}} \sin \sqrt{\frac{g}{l_{cm}}} t .$$

Для того, щоб привести його до амплітудної форми, потрібно визначити:

$$A=\sqrt{C_1^2+C_2^2};$$
$$\sin a=\frac{C_1}{A};$$
$$\cos a=\frac{C_2}{A}.$$

Як бачимо, рух механічної системи, що складається з однієї матеріальної точки, нічим не відрізняється від руху прямолінійних поливань точки, розглянутих в розділі 7 першої частини..

Розглянемо другий приклад і використаємо для розв'язання задачі отримані в даному розділі залежності.

Приклад 16. *При рівноважному спуску вантажу (рис.40) маси m=2000 кг зі швидкістю* V_0 *=5м/с відбулася несподівана затримка верхнього кінця троса, на якому опускався вантаж, через защемлення троса в обоймі блоку. Нехтуючи масою троса, визначити його найбільший натяг при наступних коливаннях вантажу, якщо коефіцієнт жорсткості троса* $c=4\cdot10^6\,H/м$.

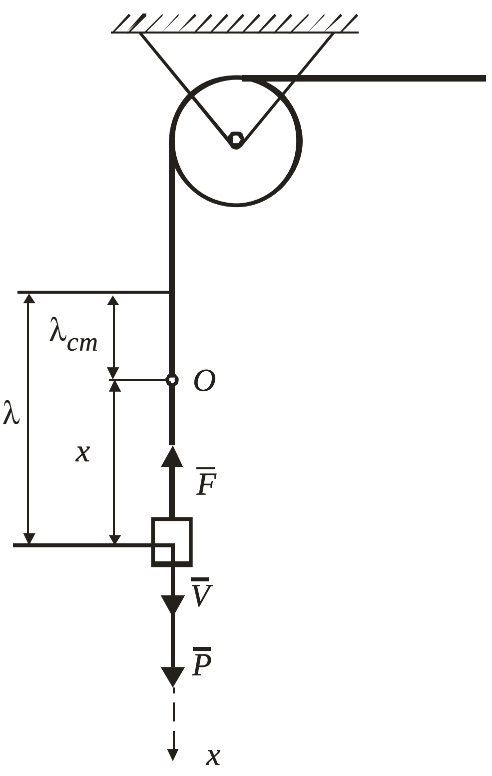


Рисунок 40

Розв’язання

Число ступенів вільності *n*=1;

Узагальнена координата *q*=*x*;

$$T=\frac{m\dot{x}^2}{2};\quad \frac{\partial T}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=\frac{m2\dot{x}\partial\dot{x}}{2\partial\dot{x}}=m\dot{x};$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=m\ddot{x};\quad Q=-\frac{\partial \Pi}{\partial x};\ \Pi=\frac{c\left(x+l_{ст}\right)^2}{2}-Px;\quad \frac{\partial \Pi}{\partial x}=c\left(x+l_{ст}\right)-P;$$

$$c\,l_{ст}=P;\quad \frac{\partial \Pi}{\partial x}=cx+c\,l_{ст}-c\,l_{ст}=cx\,.$$

Складено рівняння Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial T}{\partial x}=-\frac{\partial \Pi}{\partial x}\Rightarrow m\ddot{x}=-cx;$$

$$m\ddot{x}+cx=0;\quad \ddot{x}+k^2x=0,\ де\ k=\sqrt{c/m},$$

$$A=\sqrt{q_0^2+\left(\frac{\dot{q}_0}{k}\right)^2}=\sqrt{\frac{V^2m}{c}}=V\sqrt{\frac{m}{c}},$$

натяг тросу і його сила пружності, то одна і та ж сила, тоді:

$$F_{\max}=cA=cV\sqrt{\frac{m}{c}}=V\sqrt{mc}=5\sqrt{20000\cdot 2\cdot 10^6}=10^6\,Н=1000кН=100т.с.$$

12.5 Вплив лінійного опору на малі власні коливання системи з одним степенем вільності

12.5.1 Лінійний опір і дисипативна функція

Якщо на точки системи з одним ступенем вільності крім потенціальних сил діють ще сили опору, то рівняння Лагранжа буде мати вигляд:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q^{\Pi} + Q^{\Phi}, \tag{79}$$

де $Q^{\Pi} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q}$ – узагальнена сила від потенціальних сил;

Q^{Φ} – узагальнена сила опору.

Розглянемо випадок лінійного опору, коли сили опору $\overline{R}_k$ точок системи лінійно залежать від швидкостей цих точок, тобто

$$\overline{R}_k = -m_k \overline{V}_k = -m_k \dot{\overline{r}}_k,$$

де m_k – сталий коефіцієнт опору.

Узагальнена сила:

$$Q^{\Phi} = \sum_{k=1}^{N} \overline{R}_k \cdot \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q} = -\sum_{k=1}^{N} m_k \dot{\overline{r}}_k \cdot \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q}, \tag{80}$$

Використовуючи тотожність Лагранжа

$$\frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q} = \frac{\partial \dot{\overline{r}}_k}{\partial \dot{q}},$$

одержимо:

$$Q^{\Phi} = -\sum_{k=1}^{N} m_k \left(\dot{\overline{r}}_k \cdot \frac{\partial \dot{\overline{r}}_k}{\partial \dot{q}} \right) = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k \dot{\overline{r}}_k^{\,2}}{2}. \tag{81}$$

Уведемо позначення:

$$\Phi = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k \dot{\overline{r}}_k^{\,2}}{2} = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k \overline{V}_k^{\,2}}{2} = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k V_k^{2}}{2}. \tag{82}$$

Функція *Φ* називається дисипативною функцією, або функцією Релея. Ця функція за своєю структурою аналогічна кінетичній енергії системи, тільки в неї замість маси точок входять коефіцієнти опору.

З рівняння (81) для узагальненої сили опору маємо:

$$Q^{\Phi} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}.$$

Виразимо функцію *Φ* через q і $\dot{q}$. З огляду на те, що

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q); \; \dot{\bar{r}}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q}\dot{q},$$

маємо:

$$\Phi = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k \dot{\bar{r}}_k^2}{2} = \frac{\dot{q}^2}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q}\right)^2 = \frac{1}{2}B\dot{q}^2, \qquad (83)$$

де
$$B = B(q) = \sum_{k=1}^{N} m_k \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q}\right)^2.$$

Функція *B* залежить лише від q і не залежить від $\dot{q}$, тому що від $\dot{q}$ не залежить величина $\partial \bar{r}_k / \partial q$.

Для з'ясування фізичного змісту дисипативної функції одержимо енергетичне співвідношення, якому вона задовольняє. Для цього помножимо на $\dot{q}$ рівняння Лагранжа (79):

$$\dot{q}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \dot{q}\frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}\dot{q} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}\dot{q}. \qquad (84)$$

З огляду на те, що

$$T = \frac{1}{2}A(q)\dot{q}^2,$$

маємо:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot q} = A(q)\dot q; \quad \dot q \frac{\partial T}{\partial \dot q} = A(q)\dot q^2 = 2T\ . \tag{85}$$

Аналогічно,

$$\Phi = \frac{1}{2} B(q)\dot q^2 .$$

Отже

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot q} = B(q)\dot q\ ; \quad \dot q \frac{\partial \Phi}{\partial \dot q} = B(q)\dot q^2 = 2\Phi . \tag{86}$$

Потенціальна енергія для випадку стаціонарного потенціального поля залежить від часу тільки через координату q.

Отже

$$\dot q \frac{\partial \Pi}{\partial q} = \frac{\partial \Pi}{dt} . \tag{87}$$

Перетворимо перший додаток у рівнянні (84) з урахуванням рівняння (85). Маємо:

$$\dot q \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q} = \frac{d}{dt}\left(\dot q \frac{\partial T}{\partial \dot q} \right) - \ddot q \frac{\partial T}{\partial \dot q} = \frac{d}{dt}(2T) - \ddot q \frac{\partial T}{\partial \dot q} . \tag{88}$$

Підставляючи рівняння (85) … (87) у рівняння (84), одержимо:

$$\frac{d}{dt}(2T) - \left(\dot q \frac{\partial T}{\partial q} + \ddot q \frac{\partial T}{\partial \dot q} \right) = -\frac{d\Pi}{dt} - 2\Phi . \tag{89}$$

Враховуючи, що T – функція тільки q і $\dot q$, що залежать від t, маємо:

$$\frac{\partial T}{\partial q}\dot q + \frac{\partial T}{\partial \dot q}\ddot q = \frac{dT}{dt} .$$

Після переносу $-\dfrac{d\varPi}{dt}$ в ліву частину рівняння (89) і об'єднання додатків одержуємо:

$$\frac{d}{dt}\left(2T - T + \varPi\right) = -2\varPhi ,$$

або

$$\frac{d}{dt}\left(T + \varPi\right) = -2\varPhi .$$

Якщо ввести повну механічну енергію *E=T+П*, то остаточно маємо енергетичне співвідношення

$$\frac{dE}{dt} = -2\varPhi . \tag{90}$$

Тобто, дисипативна функція Ф характеризує швидкість зменшення повної механічної енергії системи внаслідок дії сил лінійного опору. На зменшення *E* вказує знак мінус у рівнянні (90). Функція *Ф*, відповідно до рівняння (82), є величиною додатною.

Розкладемо *Ф* у ряд в околиці положення рівноваги системи. Для цього відповідно до рівняння (83) треба розкласти в ряд за степенями q функцію $B(q)$ в межах $q = 0$.

Маємо:

$$B(q) = B(0) + \left(\frac{\partial B}{\partial q}\right)_0 q + \left(\frac{\partial^2 B}{\partial q^2}\right)_0 \frac{q^2}{2} + \cdots .$$

Підставляємо це розкладання в (83) і залишаючи в ньому тільки $B(0)$, одержуємо:

$$\varPhi = \frac{1}{2} B(0)\dot{q}^2 = \frac{1}{2} m\,\dot{q}^2 , \tag{91}$$

де введене позначення $m = B(0)$. Додатна постійна величина m називається узагальненим коефіцієнтом опору.

12.5.2 Диференціальне рівняння власних рухів при дії лінійного опору

Поблизу положення рівноваги системи маємо наступні вирази для кінетичної і потенціальної енергії і дисипативної функції:

$$T = \frac{a\dot{q}^2}{2}; \quad \Pi = \frac{cq^2}{2}; \quad \Phi = \frac{\mu\dot{q}^2}{2}.$$

Підставляючи їх у рівняння Лагранжа, одержимо:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q^{\Pi} + Q^{\Phi},$$

і з огляду на те, що

$$\frac{\partial T}{\partial q} = 0; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a\ddot{q}; \quad Q^{\Pi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} = -cq,$$

$$Q^{\Phi} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} = -\mu\dot{q},$$

одержуємо наступне диференціальне рівняння

$$a\ddot{q} = -cq - \mu\dot{q}.$$

Це наближене рівняння. При його одержанні відкинуті всі складові другого й більш високого порядків.

Якщо розподілити обидві частини рівняння на a і ввести позначення $k^2 = \frac{c}{a}$, $2n = \frac{\mu}{a}$, то одержимо диференціальне рівняння руху системи в остаточній формі:

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = 0. \quad (92)$$

Постійна $k = \sqrt{\frac{c}{a}}$ є круговою частотою власних коливань системи без урахування опору. Величина $n = \frac{m}{2a}$ називається коефіцієнтом загасання $[n] = [k] = c^{-1}$. Замість n іноді вживають величину $t_0 = \frac{1}{n}$, що називається постійною часу загасання й має розмірність часу.

12.5.3 Інтегрування диференціального рівняння коливального руху. Приклади розв'язання задач

Диференціальне рівняння (92) – однорідне лінійне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Його рішення треба шукати у формі $q = e^{lt}$, де постійна l визначається з характеристичного рівняння $l^2 + 2nl + k^2 = 0$. Корені його:

$$l_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}\,. \tag{93}$$

Можуть трапитися три випадки:

1) $n < k$ – випадок малого опору;
2) $n > k$ – випадок великого опору;
3) $n = k$ – випадок критичного опору.

1 Згасаючі коливання $(n < k)$ – випадок малого опору

Позначимо $k_1 = \sqrt{n^2 - k^2}$, тоді

$$l_{1,2} = -n \pm k_1 i\,.$$

Рішення рівняння (92) запишеться у вигляді

$$q = e^{-nt}\left(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t\right), \tag{94}$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі.

Розв’язання (93) можна подати в іншій, амплітудній формі:

$$q = Ae^{-nt}\sin(k_1 t + \alpha), \tag{95}$$

де A і α – теж постійні інтегрування.

Розглядаючи синус суми, маємо:

$$q = Ae^{-nt}\sin(k_1 t + \alpha) = e^{-nt}(A\sin\alpha \cdot \cos k_1 t + A\cos\alpha \cdot \sin k_1 t),$$

тобто

$$C_1 = A\sin\alpha; \qquad C_2 = A\cos\alpha,$$

або

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}; \quad \sin\alpha = \frac{C_1}{A}; \;\; \cos\alpha = \frac{C_2}{A}; \;\; tg\alpha = \frac{C_1}{C_2}. \tag{96}$$

Постійні C_1, C_2 і, відповідно, A і α визначаються з початкових умов $t = 0$, $q = q_0$, $\dot{q} = \dot{q}_0$.

Диференціюючи рівняння (94) за часом, маємо:

$$\dot{q} = -ne^{-nt}(C_1\cos k_1 t + C_2\sin k_1 t) + e^{-nt}(-C_1\sin k_1 t + C_2\cos k_1 t). \tag{97}$$

Використовуючи вираз (94) для q, а вираз (97) – для $\dot{q}$ при $t = 0$ одержуємо рівняння для визначення C_1 і C_2:

$$q_o = c; \;\; \dot{q}_o = -nC_1 + kC_2.$$

З них

$$C_1 = q_o; \quad C_2 = \frac{\dot{q}_o + nq_o}{k_1} = \frac{\dot{q}_o + nq_o}{\sqrt{k^2 - n^2}}.$$

Відповідно, A і α через початкові умови виразяться у наступній формі:

$$A=\sqrt{C_1^2+C_2^2}=\sqrt{q_o^2+\frac{(\dot{q}_o+nq_o)^2}{k^2-n^2}},$$

$$\sin a=\frac{q_o}{A};\quad \cos a=\frac{\dot{q}_o+nq_o}{A\sqrt{k^2-n^2}};\quad tga=\frac{q_o\sqrt{k^2-n^2}}{\dot{q}_o+nq_o}. \qquad (98)$$

Величина A додатна. Вона є амплітудою, $0\le a\le 2p$.

Графік функції (95) розглянемо між кривими $q_1=Ae^{-nt}$ і $q_2=Ae^{-nt}$ (рис.41).

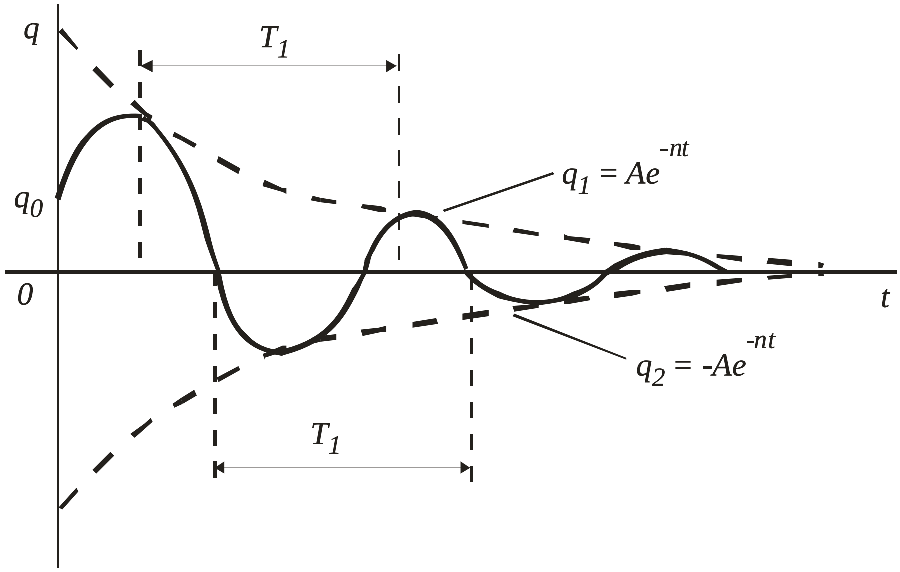


Рисунок 41

Умовним періодом згасаючих коливань називають величину

$$t_1=\frac{2p}{k_1}=\frac{2p}{\sqrt{k^2-n^2}}, \qquad (99)$$

де t_1 – постійна, що не залежить від початкових умов.

Розкладаючи t_1 в ряд по ступенях $\frac{n}{k}$ з використанням бінома Ньютона, маємо:

$$t_1=\frac{2p}{\sqrt{k^2-n^2}}=\frac{2p}{k}\left(1-\frac{n^2}{k^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=r\left(1+\frac{1n^2}{2k^2}+...\right). \qquad (100)$$

Для дуже малих $\frac{n}{k}$ можна вважати $t_1 \approx t$.

У дійсності функція $q(t)$ не є періодичною, тому що не існує величини t_1, що задовольняє умові періодичності $q(t + t_1) = q(t)$ для будь-якого моменту часу.

Визначимо моменти часу, у які функція $q(t)$ досягає максимальних і мінімальних значень. У ці моменти часу $\dot{q}(t) = 0$.

Диференціюючи вираз $q(t)$ з рівняння (95) і дорівнюючи нулю похідну, одержимо наступне:

$$\dot{q} = Ae^{-nt}\left[-n\sin(k_1 t + a) + k_1\cos(k_1 t + a)\right] = 0 .$$

Так, як e^{-nt} дорівнює нулю тільки при $t = \infty$, то відповідні моменти часу визначаються з умови рівності нулю виразу у квадратних дужках:

$$-n\sin(k_1 t + a) + k_1\cos(k_1 t + a) = 0 ,$$

або

$$tg(k_1 t + a) = \frac{k_1}{n} .$$

Якщо t_1 – одне із шуканих значень t, що задовольняють цьому тригонометричному рівнянню, то з огляду на те, що період тангенса дорівнює p , всі інші шукані значення часу будуть задовольняти співвідношенню

$$k_1 t + a = (k_1 t_1 + a) + mp ,$$

або

$$t = t_1 + m\frac{p}{k_1} ,$$

де m – будь-яке натуральне число.

Таким чином, моменти часу, в які функція $q(t)$ досягає максимумів і мінімумів, утворить нескінченну послідовність значень:

$$t_1, t_2 = t_1 + \frac{p}{k_1}, \quad t_3 = t_1 + 2\frac{p}{k_1}, \dots .$$

Змінну величину Ae^{-nt} називають умовною амплітудою загасаючих коливань. Два послідовних мінімуми теж розділяють проміжок часу, який дорівнює t_1.

Установимо закон зміни умовної амплітуди Ae^{-nt} при зміні часу на період t_1. Якщо в момент часу t_1 умовній амплітуді $A_1 = Ae^{-nt}$, то через проміжок часу, дорівнює періоду загасаючих коливань t_1, момент $t_2 = t_1 + t_1$:

$$A_2 = Ae^{-n(t_1 + t_1)} = Ae^{-nt_1}e^{-nt} = A_1e^{-nt_1} .$$

При $t_m = t_1 + mt_1$

$$A_m = Ae^{-nt_1}e^{-mnt_1} = A_1e^{-mnt_1} ,$$

або

$$A_{m+1} = Ae^{-nt_1}e^{-(m+1)nt_1} = A_me^{-nt_1} .$$

За таким же законом геометричної прогресії змінюються будь-які послідовні значення функції

$$q = Ae^{-nt}\sin(k_1t + a)$$

для моментів часу, що відрізняються один від одного на умовний період:

$$q_1 = Ae^{-nt_1}\sin(k_1t_1 + a);$$
$$q_2 = Ae^{-nt_1}e^{-nt}\sin[k_1(t_1 + t_1) + a] = q_1e^{-nt_1};$$
$$q_{m+1} = q_me^{-nt_1}.$$

$D = e^{nt_1}$ – декремент коливання.

Логарифмічний декремент коливання

$$h = \ln D = nt_1. \tag{101}$$

Добротність системи

$$Q = \frac{k}{2n}, \tag{102}$$

де k – частота власних коливань без урахування опору;

n – коефіцієнт згасання.

Логарифмічний декремент коливання можна виразити через добротність. Дійсно, із (101) і (102) з урахуванням (100):

$$h = p\sqrt{Q^2 - \frac{1}{4}}. \tag{103}$$

2 Згасаючи рухи $(n > k)$ (випадок великого опору).

У цьому випадку

$$l_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2} = -n \pm k_2,$$

де $k_2 = \sqrt{n^2 - k^2}$.

Обидва корені дійсні і від’ємні, тому що $k_2 > n$.

Отже, загальне рішення рівняння (92) має вигляд:

$$q = C_1 e^{l_1 t} + C_2 e^{l_2 t} = e^{-nt}(C_1 e^{l_1 t} + C_2 e^{-l_2 t}),$$

де постійні C_1 і C_2 визначають із початкових умов $t = 0$, $q = q_o$, $\dot{q} = \dot{q}_o$. Для $q_0 > 0$ залежно від знака і значення $\dot{q}_o$ можливі три випадки, подані на рисунку (42): 1) $\dot{q}_0 > 0$; 2) $\dot{q}_0 < 0$, але не дуже велике; 3) $\dot{q}_o = 0$ і досить велике.

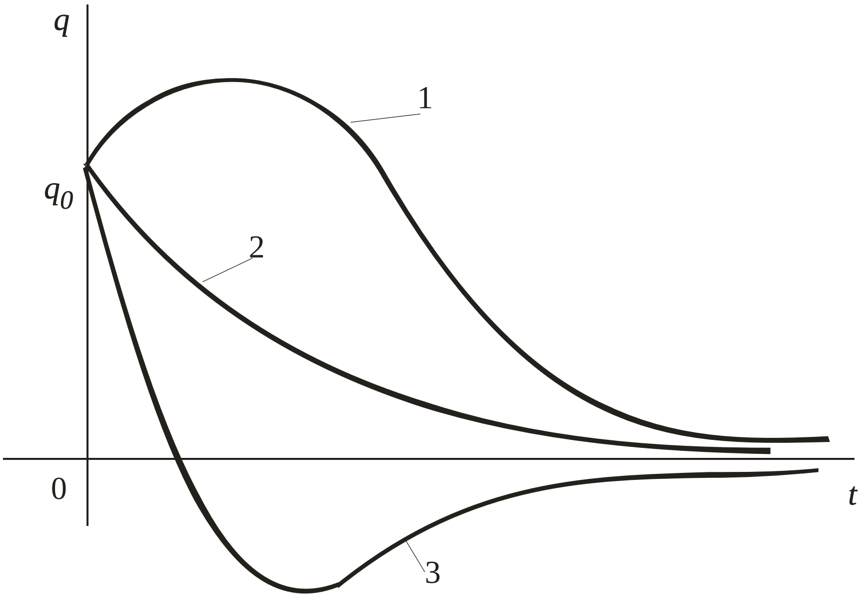


Рисунок 42

Такий рух іноді називається аперіодичним.

3 Випадок критичного опору $(n = k)$.

$$l_1 = l_2 = -n, \qquad q = e^{-nt}(C_1 t + C_2). \tag{105}$$

Цей випадок дає згасаючий рух.

Отже, при $n \geq k$ рух не є коливальним, і з деякого моменту часу починається так званий лімітаційний рух, при якому система асимптотично прагне повернутися в положення рівноваги.

Приклад 17. *Чутливий елемент приладу реєстрації вертикальних коливань фундаментів складається з ламаного важеля з вантажем E і осі O. Важелі утримуються в положенні рівноваги, при якому плече EO горизонтальне, вертикально розташованою пружиною жорсткості c_2. При цьому дві однакові, горизонтально розташовані пружини жорсткості c_1 перебувають у недеформованому стані. Момент інерції важеля разом з вантажем щодо осі обертання O дорівнює J.*

Скласти рівняння малих коливань системи; геометричні розміри зазначені на рисунку 43.

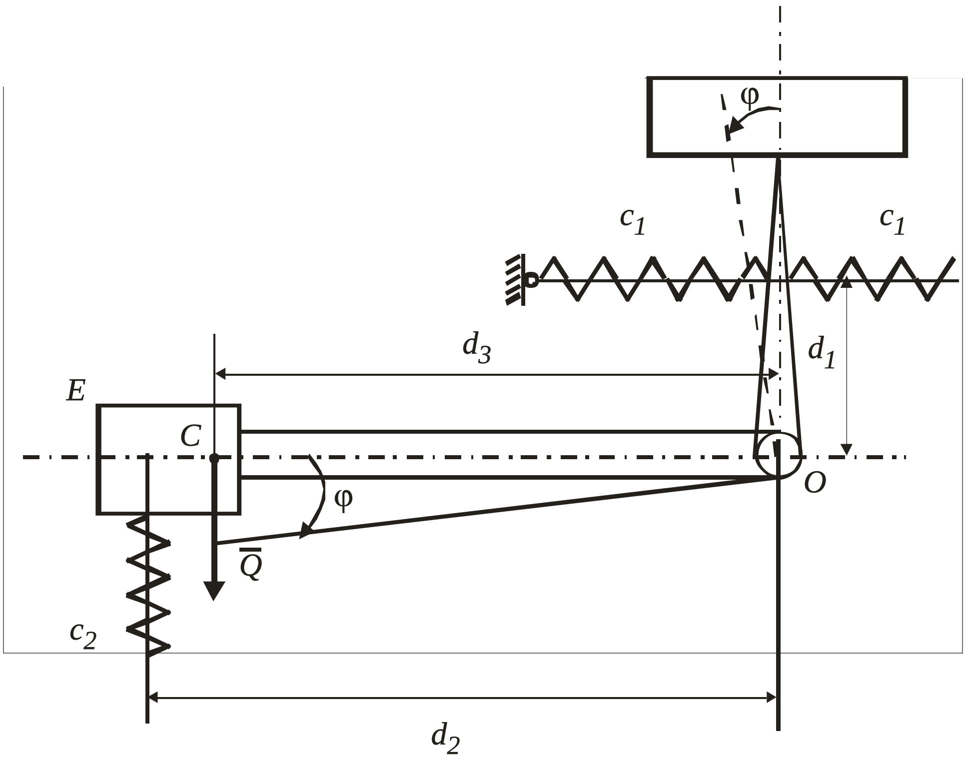


Рисунок 43

Розв’язання

За узагальнену координату приймемо кут повороту важеля φ. Кінетична енергія визначається рівністю

$$T = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 . \qquad \text{(a)}$$

Нехай маса важеля разом з вантажем дорівнює m, а центр ваги перебуває в точці C. Потенціальна енергія системи складається з потенціальної енергії $П_1$ сили ваги й потенціальної енергії $П_2$ трьох пружин.

За нульове положення системи приймемо її рівноважне положення. Тоді потенціальна енергія $П_1$ буде дорівнювати роботі сили ваги $Q = mg$ при переході системи з даного положення в рівноважне:

$$П_1 = -Q d_3 \sin \varphi ,$$

де $d_3 = OC$.

Для малих кутів

$$\varPi_1 = -Qd_3. \tag{б}$$

Позначимо через f_{cm} статичну деформацію вертикальної пружини, її повна деформація при малому куті j буде $f_{cm} + d_2 j$. Деформації горизонтальних пружин рівні $d_1 j$ і $-d_1 j$. Тепер знайдемо

$$\varPi_2 = \frac{C_1(d_1 j)^2}{2} + \frac{C_1(-d_1 j)^2}{2} + \frac{C_2(f_{cm} + d_2 j)^2}{2} - \frac{C_2 f_{cm}{}^2}{2},$$

або

$$\varPi_2 = C_1 d_1{}^2 j^2 + \frac{C_2(f_{cm} + d_2 j)^2}{2} - \frac{C_2 f_{cm}{}^2}{2}. \tag{в}$$

Потенціальна енергія системи $\varPi$ дорівнює:

$$\varPi = \varPi_1 + \varPi_2 = -Qd_3 j + C_1 d_1^2 j^2 + \frac{C_2 f_{cm}^2}{2} + C_1 f_{cm} d_2 j + \frac{C_2 d_2^2 j}{2} - \frac{C_2 f_{cm}^2}{2} =$$
$$= (-Qd_3 + C_2 f_{cm} d_2) j + \frac{1}{2}(2C_1 d_1^2 + C_2 d_2^2) j^2. \tag{д}$$

У положенні рівноваги повинна виконуватися рівність

$$\left(\frac{\partial \varPi}{\partial j}\right)_o = 0.$$

Для даного прикладу

$$\left(\frac{\partial \varPi}{\partial j}\right)_o = \left[(-Qd_3 + C_2 f_{cm} d_2) + (2C_1 d_1^2 + C_2 d_2^2) j\right]_{j=o} = -Qd_3 + C_2 f_{cm} d_2 = 0 \tag{ж}$$

З урахуванням рівняння (ж) вираз (д) набуде вигляду:

$$\varPi = \frac{1}{2}(C_1 d_1^2 + C_2 d_2^2) j^2, \tag{к}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi}=0,\quad \frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}=J\dot\varphi,\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}=J\ddot\varphi,\quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}=(2C_1\delta_1^2+C_2\delta_2^2)\varphi\ . \tag{л}$$

Рівняння Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}-\ \frac{\partial T}{\partial \varphi}=\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}. \tag{м}$$

Підставляючи рівняння (л) у рівняння (м), одержимо:

$$J\ddot\varphi=-(2C_1\delta_1^2+C_2\delta_2^2)\varphi \ \text{ або } \ \ddot\varphi+\left(\frac{2C_1\delta_1^2+C_2\delta_2^2}{J}\right)\varphi=0. \tag{н}$$

Кругова частота k і період коливань T визначаються рівностями:

$$k=\sqrt{\frac{2C_1\delta_1^2+C_2\delta_2^2}{J}},\qquad T=\frac{2\pi}{k}=2\pi\sqrt{\frac{J}{2C_1\delta_1^2+C_2\delta_2^2}}. \tag{п}$$

Приклад 18. *Розглянемо ту ж схему вібрографа (рис.44), але приєднаємо до нього демпфер* D*, що створює силу опору, пропорційну швидкості поршня (рис.45). Тоді при малих коливаннях швидкість поршня буде дорівнювати* $\beta\dot\varphi$*, сила опору* $-\mu\beta\dot\varphi$ *(*μ *- постійний коефіцієнт опору), що відповідає узагальненій силі:*

$$Q^{\Phi}=-\mu\beta^2\dot\varphi. \tag{а}$$

Розв’язання

Повна узагальнена сила:

$$Q=-\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}+Q^{\Phi}=-\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}-\mu\beta^2\dot\varphi.$$

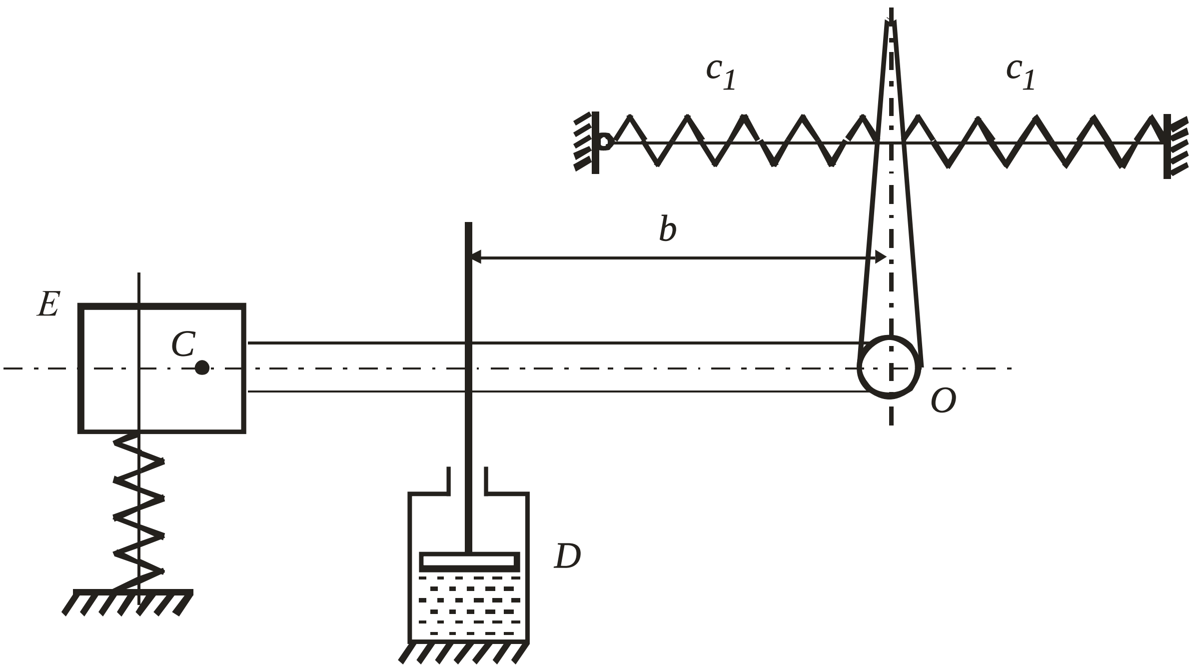


Рисунок 44

Після підстановки відповідних величин у рівняння Лагранжа одержимо диференціальне рівняння малих коливань:

$$J\ddot{\varphi} = -(2C_1 d_1^2 + C_2 d_2^2)\varphi - mb^2\dot{\varphi}, \quad \textit{або} \quad \ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + k^2\varphi = 0, \tag{б}$$

де k має колишнє значення із (к), а $n = \dfrac{mb^2}{2J}$. Звичайно $n < k$, тому загальне розв'язання буде $\varphi = Ae^{-nt}\sin(k_1 t + \alpha)$, $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$, що визначає згасаючі коливання.

Складемо рівняння Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q^{\Pi} + Q^{\Phi}, \quad T = \frac{m_A V_A^2}{2} = \frac{P}{2g} b^2 \dot{\varphi}^2;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{Pb^2}{g}\ddot{\varphi}, \quad \Pi = \Pi_1 + \Pi_2; \quad \Pi_1 = -Ps_A = -Pb\varphi;$$

$$\Pi_2 = \frac{c}{2}(l^2 - l^2_{cm}) = \frac{c}{2}\left[(l_{cm} + s_B)^2 - l^2_{cm}\right] = \frac{c}{2}\left[l^2_{cm} + 2l_{cm}s_B - l^2_{cm}\right] = c\,l_{cm}s_B + \frac{cs_B^2}{2};$$

$$s_B = l\varphi \qquad \Pi_2 = c\,l_{cm} l\varphi + \frac{cl^2}{2}\varphi^2; \quad \Pi = (c\,l_{cm} l - Pb)\varphi + \frac{cl^2}{2}\varphi^2;$$

$$\frac{d\Pi}{d\varphi} = (c\,l_{cm} l - Pb) + cl^2\varphi;$$

При $\varphi = 0$ $\quad \frac{d\Pi}{d\varphi} = 0; \quad (c\,l_{CT} l - Pb) = 0;$

$$Q^{\Pi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -cl^2\varphi;$$

$$\overline{R} = -a\overline{V}_A; \quad \left(\Phi = \frac{m\dot{q}^2}{2}\right); \quad \Phi = \frac{aV_A^2}{2} = \frac{ab^2\dot{\varphi}^2}{2};$$

$$Q^{\Phi} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}} = -ab^2\dot{\varphi}; \qquad \frac{Pb^2}{g}\ddot{\varphi} = -cl^2\varphi - ab^2\dot{\varphi};$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{ab^2 g}{Pb^2}\dot{\varphi} + \frac{cl^2 g}{Pb^2}\varphi = 0; \qquad \ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + k^2\varphi = 0;$$

$$n = \frac{ag}{2P}; \qquad k^2 = \frac{cl^2 g}{Pb^2}; \qquad k = \frac{l}{b}\sqrt{\frac{cg}{P}}\,.$$

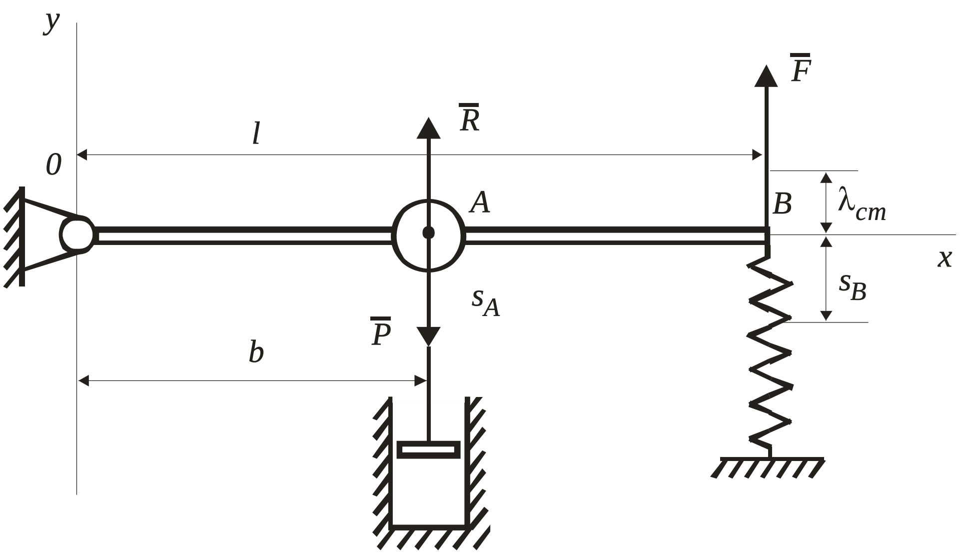


Рисунок 45

Якщо $n < k$, коливання згасаючі.

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{\frac{cl^2 g}{Pb^2} - \frac{\alpha^2 g^2}{4P^2}} .$$

Рух буде аперіодичним, якщо

$$n \geq k \qquad \frac{\alpha g}{2P} \geq \frac{l}{b}\sqrt{\frac{cg}{P}} \qquad \alpha \geq \frac{2Pl}{gb}\sqrt{\frac{cg}{P}} = \frac{2l}{b}\sqrt{\frac{cP}{g}} .$$

Цю задачу можна розв’язати й іншим способом за допомогою диференціального рівняння обертального руху:

$$J_z \ddot{\varphi} = \sum M_z(\overline{F}{}_k^e),$$

$$J_z = mb^2 = \frac{P}{g}b^2; \quad \sum M_z(F_k^e) = P \cdot b - R \cdot b - F \cdot l;$$

$$\sum M_z(\overline{F_k^e}) = Pb - \alpha \cdot b^2 \cdot \dot{\varphi} - c(l_{CT} + l \cdot \varphi) \cdot l.$$

У положенні статичної рівноваги $\sum M_z(\overline{F}{}_k^e) = 0$.

$$(\varphi = 0;\ \dot{\varphi} = 0) \qquad Pb - c\,l_{CT} l = 0 ;$$

Тоді
$$\sum M_z(\overline{F}{}_k^e) = -\alpha b^2 \dot{\varphi} - cl^2 \varphi ;$$

$$\frac{Pb^2}{g}\ddot{\varphi} = -\alpha b^2 \dot{\varphi} - cl^2 \varphi ;$$

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + k^2 \varphi = 0.$$

Далі диференціальне рівняння розв’язується так, як і при вирішенні задачі першим способом.

12.6 Змушені коливання системи без урахування опору

Приклади розв'язування задач

Розглянемо випадок, коли крім потенціальних сил на матеріальну систему діє сила, що збурює коливання і яка залежить від часу.

Відповідну узагальнену силу позначимо Q^B. Тоді одержимо із рівняння Лагранжа $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q^{П} + Q^B$ наступне диференціальне рівняння

$$\ddot{q} + k^2 q = F(t), \tag{106}$$

де $F(t) = \frac{Q^B(t)}{a}$ (a – коефіцієнт інерції).

Припускаємо, що сила, яка збурює коливання змінюється за гармонійним законом, тоді

$$\ddot{q} + k^2 q = h\sin(pt + d), \tag{107}$$

де p – кругова частота збурюючої сили

h, p і d – постійні величини

Загальний розв'язок отриманого диференціального рівняння

$$q = q_1 + q_2. \tag{108}$$

Розв'язок q_1 називають власним коливанням системи:

$$q_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt = A\sin(kt + a). \tag{109}$$

Частинна розв'язку q_2 рівняння (108) називають змушеним коливанням системи.

Можливі два випадки знаходження q_2:

1 Випадок відсутності резонансу $(p \neq k)$.

Рішення q_2 варто шукати у вигляді:

$$q_2 = B\sin(pt + d)\,. \tag{110}$$

Знайдемо:

$$\dot q_2 = Bp\cos(pt + d), \quad \ddot q_2 = -Bp^2\sin(pt + d)\,. \tag{111}$$

Підставляючи рівняння (110) і (111) у рівняння (107) одержуємо:

$$B(k^2 - p^2)\sin(pt + d) = h\sin(pt + d)\,,$$

звідки

$$B = \frac{h}{k^2 - p^2} \text{ і } q_2 = \frac{h}{k^2 - p^2}\sin(pt + d)\,. \tag{112}$$

Таким чином,

$$q = q_1 + q_2 = C_1\cos kt + C_2\sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2}\sin(pt + d)\,, \tag{113}$$

або в амплітудній формі

$$q = A_1\sin(kt + a_1) + \frac{h}{k^2 - p^2}\sin(pt + d)\,. \tag{114}$$

Похідні від рівнянь (113) і (114):

$$\dot q = C_1 k\sin kt + C_2\cos kt + \frac{h}{k^2 - p^2}\cos(pt + d)\,, \tag{115}$$

або

$$\dot q = C_1 k\cos(kt + a_1) + + \frac{h}{k^2 - p^2}\cos(pt + d)\,. \tag{116}$$

Сталі інтегрування C_1 і C_2 або A_1 й a_1 визначаються з початкових умов $t = 0$, $q = q_0$, $\dot{q} = \dot{q}_0$ підстановкою їх у рівняння (113) … (115).

$$q_o = C_1 + \frac{h}{k^2 - p^2}\sin d; \quad \dot{q}_o = C_2 k + \frac{hp}{k^2 - p^2}\cos d .$$

Звідси

$$C_1 = q_o - \frac{hp}{k^2 - p^2}\sin d; \quad C_2 = \frac{\dot{q}_o}{k} - \frac{hp}{k(k^2 - p^2)}\cos d .$$

Амплітуда власних коливань A_1 і початкова фаза a_1 через C_1 і C_2 виражаються формулами:

$$A_1 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}; \quad tga = \frac{C_1}{C_2}.$$

Отже, A_1 й a_1 залежать не тільки від початкових умов, але і від параметрів сили, що збурює коливання, тобто власні коливання можуть виникати при нульових початкових умовах завдяки дії збуджуючої сили.

Амплітуда змушених коливань

$$A_2 = \frac{h}{\left|k^2 - p^2\right|}.$$

При $p < k$ $q_2 = A_2 \sin(pt + d)$;

при $p > k$ $q_2 = -A_2 \sin(pt + d) = A_2 \sin(pt + d - p)$ тобто при $p > k$ зсув фаз змушених коливань дорівнює 0, і збуджуючі сили можуть водночас мати максимальні і мінімальні значення.

Змушені коливання без опору при $p \neq k$ *виникають завдяки гармонійній силі, що є збуджуючою силою, являються гармонійними коливаннями з постійною амплітудою. Їхня частота збігається із частотою сили, що збурює коливання. Вони не залежать від початкових умов.*

2 Випадок резонансу $(p = k)$.

Частинне рішення шукаємо у формі:

$$q_2 = Bt\cos(pt + d); \qquad (117)$$

$$\dot{q}_2 = Bt\cos(pt + d) - Bpt\sin(pt + d);$$
$$\ddot{q}_2 = -Bp\sin(pt + d) - Bp\sin(pt + d) - Bp^2 t\cos(pt + d);$$
$$-2Bp\sin(pt + d) - Bp^2 t\cos(pt + d) + k^2 Bt\cos(pt + d) = h\sin(pt + d);$$
$$B = -\frac{h}{2p};$$

$$q_2 = -\frac{ht}{2p}\cos(pt + d) = \frac{ht}{2p}\sin(pt + d - \frac{p}{2}). \qquad (118)$$

Видно, що амплітуда $A_2 = \frac{ht}{2p}$ збільшується пропорційно часу (рис.46), а зсув фаз дорівнює $\frac{p}{2}$.

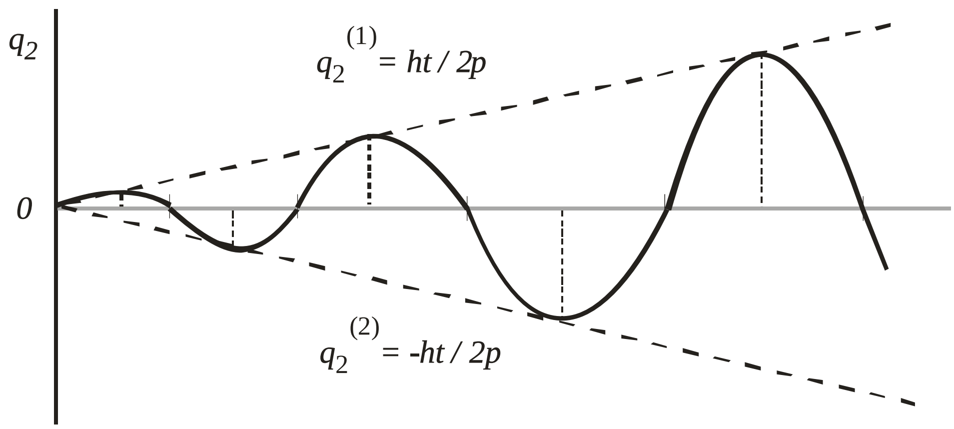
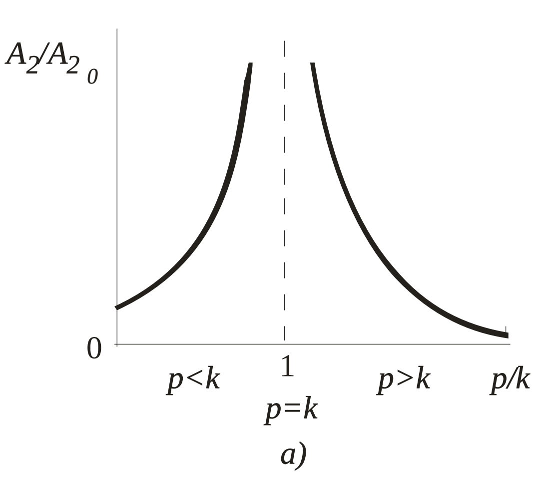


Рисунок 46

Побудуємо для змушених коливань графіки (рис.47), (47,а) амплітуди і зсуву фаз (47,б) залежно від кругової частоти сили, що збурює коливання.



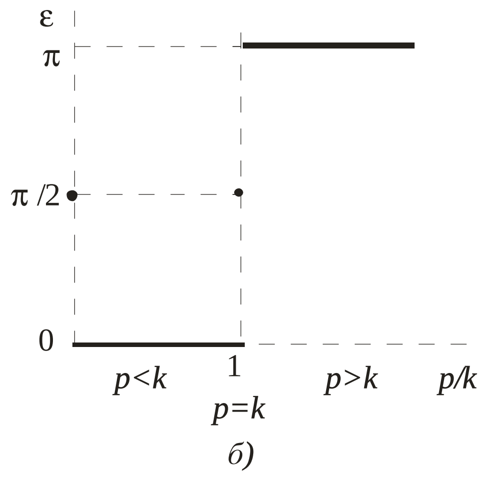


Рисунок 47

Маємо:

$$A_2 = \frac{h}{\left|k^2 - p^2\right|} \qquad \text{або } p \neq k, \qquad \text{або } \frac{A_2}{A_{20}} = \frac{1}{\left|1 - \frac{p^2}{k^2}\right|},$$

де введене позначення $A_{20} = \dfrac{h}{k^2}$.

$l = \dfrac{1}{\left|1 - \dfrac{p^2}{k^2}\right|}$ – коефіцієнт динамічності.

Приклад 19. *Кривошип CD (рис.48) рівномірно обертається навколо осі C і повідомляє кулісі AB поступальний рух відповідно до рівняння* $x_1 = r\sin wt$, *де* $r = CD = 10см$; $w = 5c^{-1}$.

До куліси прикріплена пружина, що підтримує вантаж M вагою $G = 4H$. *Коефіцієнт жорсткості пружини* $c = 0{,}2H/см$. *Визначити змушені коливання вантажу.*

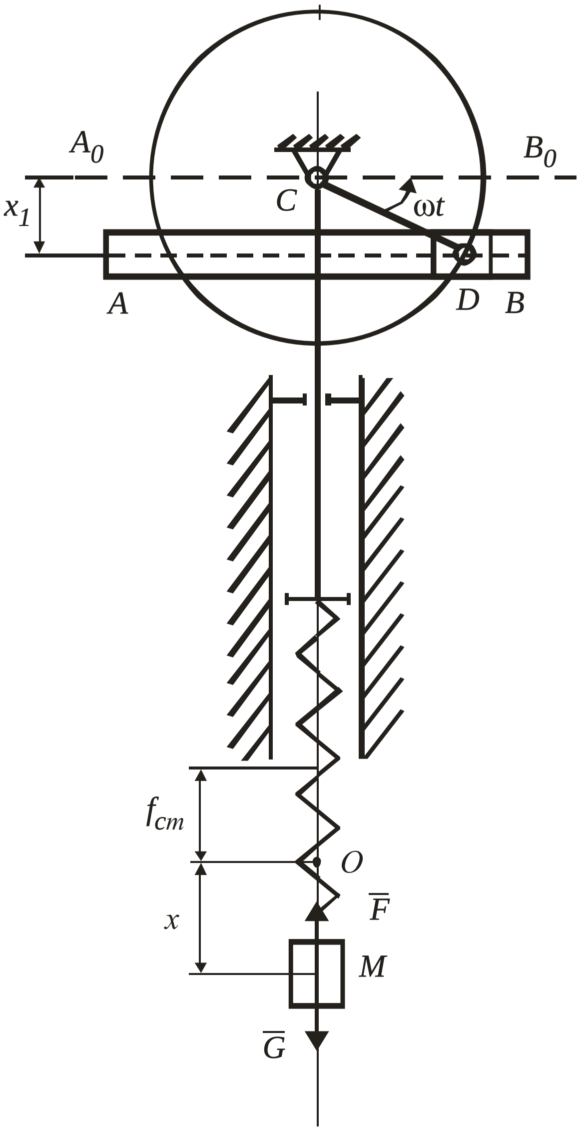


Рисунок 48

Розв’язання

При коливаннях куліси AB вантаж M також здійснює коливальний рух за вертикаллю. При цьому абсолютний рух вантажу складається з його переносного руху разом з кулісою і відносним рухом стосовно куліси.

Початок координат O перебуває в положення спокою вантажу, що відповідає статичному видаленню f_{cm} пружини, за умови, що куліса займає середнє положення A_oB_o. У довільний момент часу подовження пружини дорівнює $(f_{cm} + (x - x_1))$. Сила пружності пружини:

$$F_x = -c(f_{cm} + x - x_1).$$

У положенні статичної сили рівноваги $cf_{cm} = G$.

Диференціальне рівняння руху:

$$m\ddot{x} = -c(f_{cm} + x - x_1)$$

або

$$m\ddot{x} = -cx + cr\sin wt; \quad \ddot{x} + k^2x = h\sin wt,$$

де $k = \sqrt{\frac{c}{m}}C^{-1}; \quad h = \frac{cr}{m} = 490см/c^{-2}$.

Рівняння змушених коливань:

$$x_2 = B\sin(pt + d);$$

$$B = \frac{k}{k^2 - p^2} = \frac{490}{49 - 25} = 20{,}4см;$$

$$p = w = 5c^{-1}; \;\; d = 0,$$

тоді $x_2 = 20{,}4\sin 5t(см)$.

Період і частота коливань вантажу дорівнюють періоду і частоті коливань куліси. Амплітуда коливань вантажу більше амплітуди коливань куліси (залежать від p і k).

Розглянемо приклади змушених коливань без урахування сил опору (без розв’язання задач).

1 Індикатор тиску $(p << k)$ (рис.49). Змушені коливання при частоті збуджуючої сили, значно нижче резонансної, характеризуються тим, що амплітуда таких коливань майже не відрізняється від статичного переміщення, створюваного максимальною збудженою силою. Відношення $\frac{p}{k}$ буде малим і $l \approx 1$. Тоді ординати запису на барабан можна вважати пропорційними тиску. Загальні вимоги до індикатора: легкість поршня і жорстка пружина, що дає високу частоту.

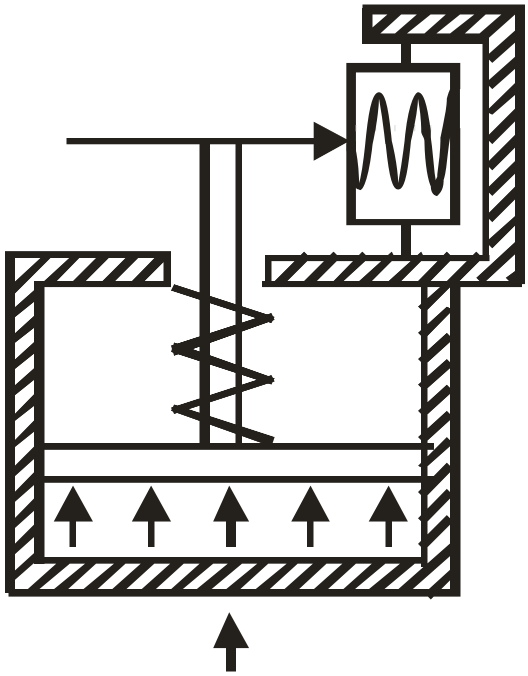


Рисунок 49

2 Віброграф ($p >> k$) (рис.50). Частота змушених коливань значно вище резонансної, відношення $\frac{p}{k}$ велике. Амплітуди таких коливань невеликі. Між силою, що збурює коливання, і змушеними коливаннями зсуву фаз існує рівність. У приладі на м'яких пружинах підвішений вантаж. Рамка прикріплена до тіла, яке коливається вертикально. Власна частота дуже низька в порівнянні із частотою, що збурює коливання. Вантаж G буде практично перебувати в просторі на одному місці. Тоді вимірювальний приклад покаже досить точно абсолютне значення вертикального переміщення рамки.

3 У випадках на ресорах ($p >> k$) (рис.51) сила. яка збурює коливання високої частоти, практично не створює коливань системи з низькою частотою ($\frac{p}{k}$ – велике, амплітуда змушених коливань буде мала).

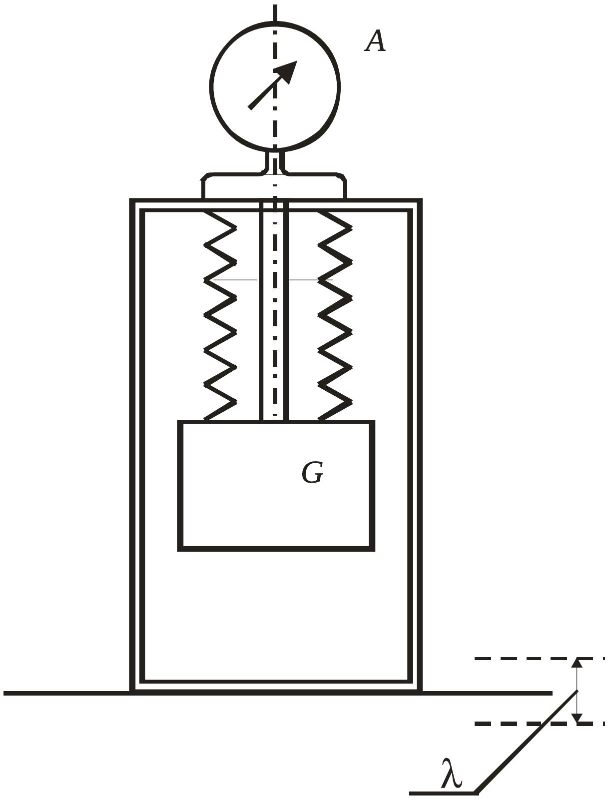


Рисунок 50

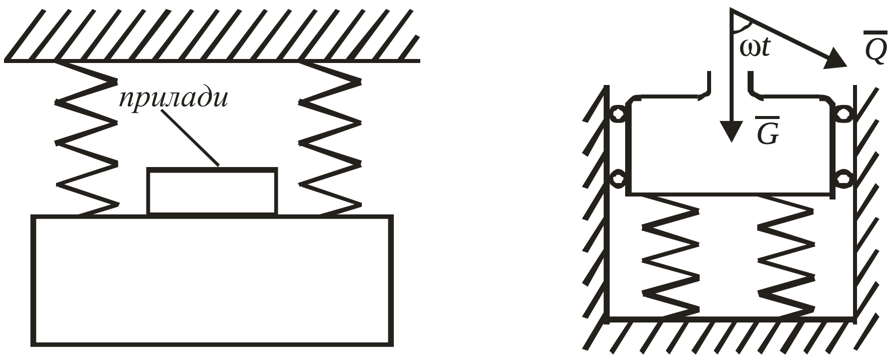


Рисунок 51

4 Тахометр Фрама (резонанс $(p = k)$) (рис.52). Вантаж, власна частота якого близька до частоти коливання тіла, буде коливатися з більшою амплітудою, чим вантажі.

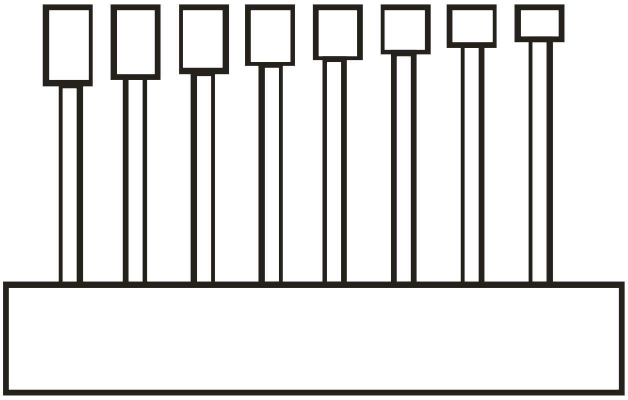


Рисунок 52

5 Вібратор (рис.53). Застосовується при визначенні власної частоти коливання мостів, будинків й інших великих будов. Його можна використати для випробування великих конструкцій. Невеликим вібратором можна зруйнувати значну конструкцію.

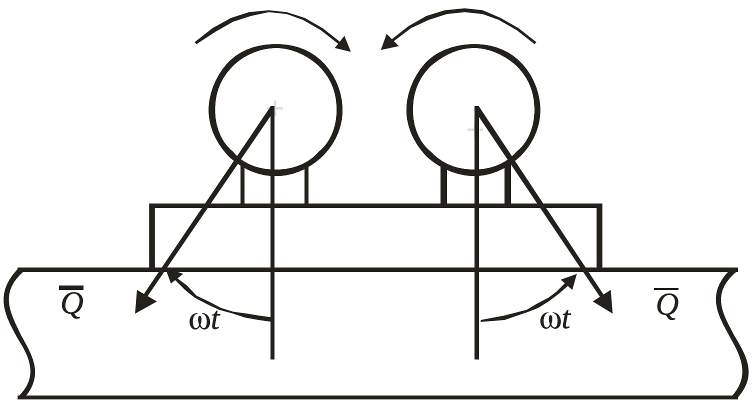


Рисунок 53

6 Віброграф Гейгера (рис.54). У рівноважному стані маятник займає горизонтальне положення; $OC = a$; $OB = b$. Вага вантажу дорівнює P.

У рівноважному положенні

$$Pa - F_0 b = 0 . \tag{a}$$

Прилад поміщений на горизонтальній площині L, що здійснює вертикальні коливання біля деякого середнього положення L_0.

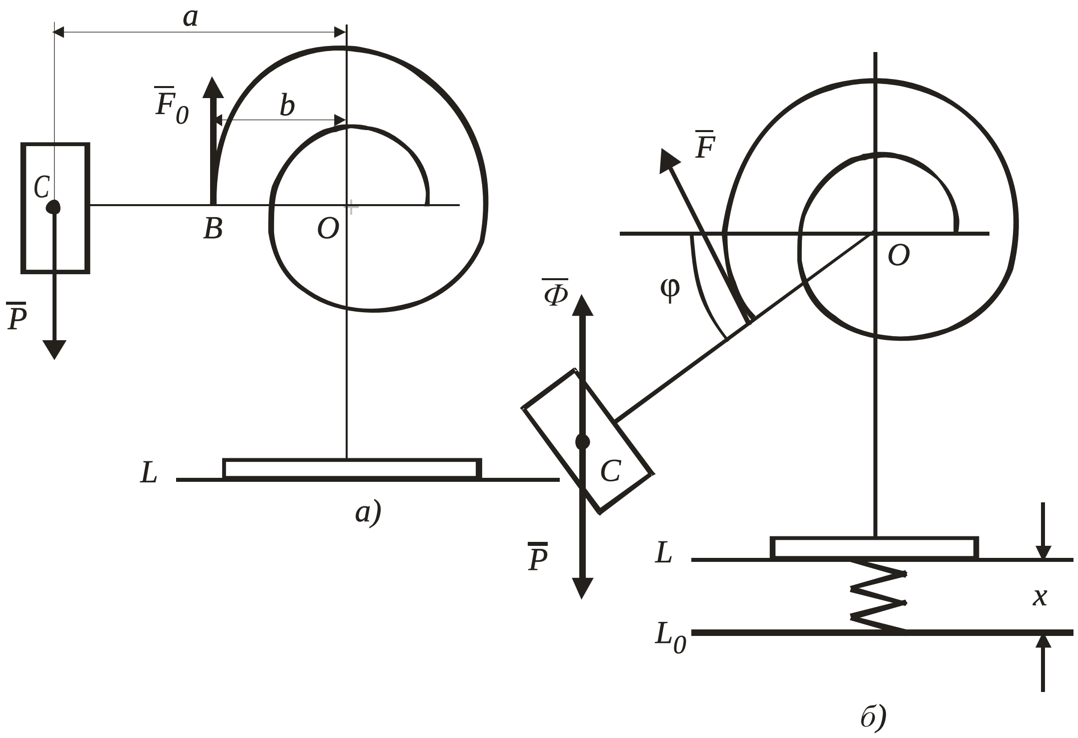


Рисунок 54

Чи можна вважати коливання маятника досить точною реєстрацію коливань самої площини L? Розв'яжемо цю задачу.

Абсолютний рух маятника складається з переносного руху разом зі штативом і відносним рухом стосовно штатива. Обертальний рух маятника, що цікавить нас, і є цим відносним рухом.

До відносного руху можна застосувати всі закони динаміки, що мають місце в абсолютному русі, за умови приєднання до діючих сил відповідних сил інерції. Переносний рух – поступальний. Сила інерції $\overline{\Phi} = -m\overline{a}_e$, $\Phi = m\ddot{x}$.

Диференціальне рівняння обертального руху маятника:

$$J\ddot{\varphi} = \sum M_o\left(\overline{F}_k^{(e)}\right) + \sum M_o\left(\overline{\Phi}_k\right);$$

$$J\ddot{\varphi} = P \cdot a\cos\varphi - F \cdot b - \Phi \cdot a\cos\varphi .$$

Для малих кутів $\sin\varphi = \varphi$, $\cos\varphi = 1$, тоді

$$J\ddot{\varphi} = Pa - Fb - \Phi a . \qquad (6)$$

Сила пружності пружини визначається за формулою

$$F = F_o + cj \ . \qquad \text{(в)}$$

Отже

$$J\ddot{j} = Pa - F_0 b - cbj - \Phi a ,$$

або з урахуванням рівняння (а)

$$J\ddot{j} + cbj = -\Phi a . \qquad \text{(д)}$$

Припустимо,

$$x = D\sin(pt + d) , \qquad \text{(ж)}$$

$$\dot{x} = Dp\cos(pt + d) ; \quad \ddot{x} = -Dp^2 \sin(pt + d) ;$$

$$\Phi = mDp^2 \sin(pt + d) . \qquad \text{(к)}$$

Підставляючи рівняння (к) у рівняння (д) і ділячи на J, одержимо:

$$\ddot{j} + \frac{cb}{J} j = -\frac{mDp^2}{J} \sin(pt + d) ,$$

або

$$\ddot{j} + k^2 j = h\sin(pt + d) ,$$

або

$$\ddot{j} + k^2 j = h\sin(pt + d) .$$

Власна кругова частота $k = \sqrt{\dfrac{cb}{J}}$; $h = -\dfrac{mDp^2 a}{J}$.

Нехтуючи власними коливаннями маятника, які загасають внаслідок наявності у приладі тертя, одержимо рівняння змушених коливань:

$$j = \frac{h}{k^2 - p^2} = \frac{mDa}{J\left(1 - \frac{k^2}{p^2}\right)}.$$

Приймаючи $J = ma^2$ і з огляду на те, що $p >> k$,одержимо:

$$A_2 = j_{\max} \approx \frac{mDa}{ma^2} = \frac{D}{a},$$

що відповідає амплітуді коливань площини L.

12.7 Вплив лінійного опору на змушені коливання

12.7.1 Диференціальне рівняння змушених коливань і його інтегрування

Розглянемо випадок, коли узагальнена сила Q складається із трьох сил: потенціальної сили $Q^{П} = -\frac{\partial П}{\partial q} = -cq$; сили лінійного опору $Q^{Ф} = -\frac{\partial Ф}{\partial \dot{q}} = -m\dot{q}$ та гармонійної збуджуючої сили $Q^{B} = H\sin(pt + d)$. Підставляючи це значення узагальненої сили $Q = Q^{П} + Q^{Ф} + Q^{B}$ в рівняння Лагранжа, одержуємо:

$$a\ddot{q} + m\dot{q} + cq = H\sin(pt + d),$$

або

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = h\sin(pt + d), \qquad (119)$$

де $k^2 = \frac{c}{a}$ – кругова частота власних коливань;

$n = \frac{m}{2a}$ – коефіцієнт згасання;

$h = \dfrac{H}{a}$ – відносна амплітуда сили, що збурює коливання.

Розв'язання рівняння (119) має вигляд: $q = q_1 + q_2$,

де q_1 – загальне рішення однорідного рівняння, так зване змушене коливання.

Величину q називають загальним змушеним рухом (або змушеним коливанням).

Відомо, що при $n < k$: $q_1 = A_1 e^{-nt} \sin(\sqrt{k^2 - n^2 t} + a_1)$;

$$n = k: \; q_1 = e^{-nt}(C_1 t + C_2);$$

$$n > k: \; q_1 = e^{-nt}(C_1 e^{\sqrt{n^2 - k^2}t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2 - k^2}t}).$$

Рішення q_2 шукаємо у формі $q_2 = A \sin(pt + d - e)$,

$$\dot{q}_2 = Ap\cos(pt + d - e); \; \ddot{q}_2 = -Ap^2 \sin(pt + d - e).$$

Підставимо похідні в рівняння (119):

$$Ap^2 \sin(pt + d - e) + 2Anp\cos(pt + d - e) + Ak^2 \sin(pt + d - e) = h\sin(pt + d).$$

Перетворимо праву частину цієї рівності:

$$h\sin(pt + d) = h\sin[(pt + d - e) + e] =$$
$$= h\sin e \cos(pt + d - e) + h\cos e \sin(pt + d - e).$$

Після підстановки одержимо:

$$\left[A(k^2 - p^2) - h\cos e\right]\sin(pt + d - e) + [2Anp - h\sin e]\cos(pt + d - e) = 0.$$

Так як синус і косинус змінного аргументу не дорівнюють нулю одночасно, то тотожність може виконуватися тільки тоді, коли кожна з постійних у квадратних дужках дорівнює нулю, тобто

$$A(k^2 - p^2) = h\cos e; \qquad 2Anp = h\sin e .$$

Звідки

$$A = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2) + 4n^2 p^2}};$$

$$\sin e = \frac{2Anp}{h};$$

$$\cos e = \frac{A(k^2 - p^2)}{h};$$

$$tge = \frac{2np}{k^2 - p^2}.$$

З формули для $\sin e$ необхідно, щоб $\sin e > 0$, отже, $0 \le e \le p$, тому для визначення e досить тільки знати tge.

Отже

$$q_2 = A\sin(pt + d - e), \tag{120}$$

де $$A = \frac{h}{(k^2 - p^2) + 4n^2 p^2};\ tge = \frac{2np}{k^2 - p^2};\ \ 0 \le e \le p \tag{121}$$

12.7.2 Основні властивості змушених коливань

Змушені коливання не згасають. Їхня частота збігається із частотою сили, яка збурює коливання. Змушені коливання і при лінійному опорі не залежать від початкових умов.

Амплітуда і зсув фаз змушених коливань залежать від частот власних і змушених коливань і коефіцієнта згасання.

Чим більше коефіцієнт загасання, тим менше амплітуда змушених коливань.

Достатньо малого опору, щоб амплітуда змушених коливань при резонансі була постійною.

12.7.3 Дослідження змушених коливань

Постійну величину $q_2 = \dfrac{h}{k^2}$ називають статичним зсувом (яке відповідає відхиленню від положення рівноваги під дією постійної сили H). $A_0 = \dfrac{h}{k^2}$ можна вважати «амплітудою» змушених коливань під дією постійної сили, що збурює коливання. Величину $\dfrac{A}{A_0}$ називають коефіцієнтом динамічності:

$$\frac{A}{A_0} = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \cdot \frac{1}{h/k^2} = \frac{1}{\sqrt{(1 - z^2 + 4b^2 z^2 + 4b^2 z^2)}}, \quad (122)$$

де $z = \dfrac{p}{k}$ – відносна частота сили, що збурює коливання;

$b = \dfrac{m}{k}$ – відносний коефіцієнт згасання.

З рівняння (122) витікає, що при будь-якому b коефіцієнт динамічності, коли $z = \dfrac{p}{k} \to \infty$, намагається набути нульового значення, тобто: $\dfrac{A}{A_o} \to 0$ або $A \to 0$. У цьому випадку дія збурювань із великою частотою не сприймається коливною системою і не порушує режиму власних коливань (приклад: віброізоляція).

Введемо функцію $f(z) = (1 - z^2)^2 + 4b^2 z^2$.

$$\frac{A}{A_0} = \frac{1}{\sqrt{f(z)}}. \quad (123)$$

Очевидно, коли $f(z)$ досягає максимуму, то $\frac{A}{A_0}$ має мінімум, і навпаки.

Для визначення екстремальних значень обчислимо похідні за z:

$$f'(z) = -4z(1-z^2) + 8b^2 z = -4z(1-2b^2 - z^2);$$

$$f''(z) = -4z(1-z^2) + 8b^2 + 8b^2 = 8z^2 - 4(1-2b^2 - z^2).$$

З умови екстремуму $f'(z) = 0$, одержуємо:

$$z_1 = 0, \quad z_2 = \sqrt{1-2b^2}.$$

Так як відносна частота може бути тільки додатною і дорівнює нулю для сталої збуджуючої сили, то $1-2b^2 > 0$; отже $b < \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707$. Для таких b $f''(z) < 0$ при $z = z_1$, а тому функція $f(z)$ досягає максимуму, а коефіцієнт динамічності – мінімуму. Для $z = z_2 = \sqrt{1-2b^2}$, навпаки, $f''(z) > 0$, і, отже, $f(z)$ має мінімум, а коефіцієнт динамічності – максимум.

Для значень b, при яких $1-2b^2 = 0$ ($b = \frac{\sqrt{2}}{2}$), маємо $z_1 = z_2 = 0$ і $f''(z) = 0$. Додаткові дослідження третьої й четвертої похідних показують, що в цьому випадку $f(z)$ при $z = 0$ досягає мінімуму, а коефіцієнт динамічності має максимум. Інших екстремальних значень $f(z)$ не має.

Якщо $1-b^2 < 0$, то z_2 стає уявним. Це можна інтерпретувати як відсутність інших значень z_1, крім $z = 0$, при яких $f(z)$ досягає екстремуму. При $z = 0$ $f(z) = \min$, а $\frac{A}{A_0} = \max$. Зі збільшенням z коефіцієнт динамічності при $1-2b^2 = 0$ монотонно убуває від свого максимуму при $z = 0$ до нуля при $z \to \infty$.

Результати дослідження коефіцієнта динамічності зображені графічно у вигляді так званих резонансних кривих, або амплітудно-частотної характеристики системи (рис 55), тобто залежності $\frac{A}{A_0}$ від z при різних значеннях коефіцієнта згасання b. При цьому використані результати досліджень, отримані при відсутності опору, коли $b = 0$.

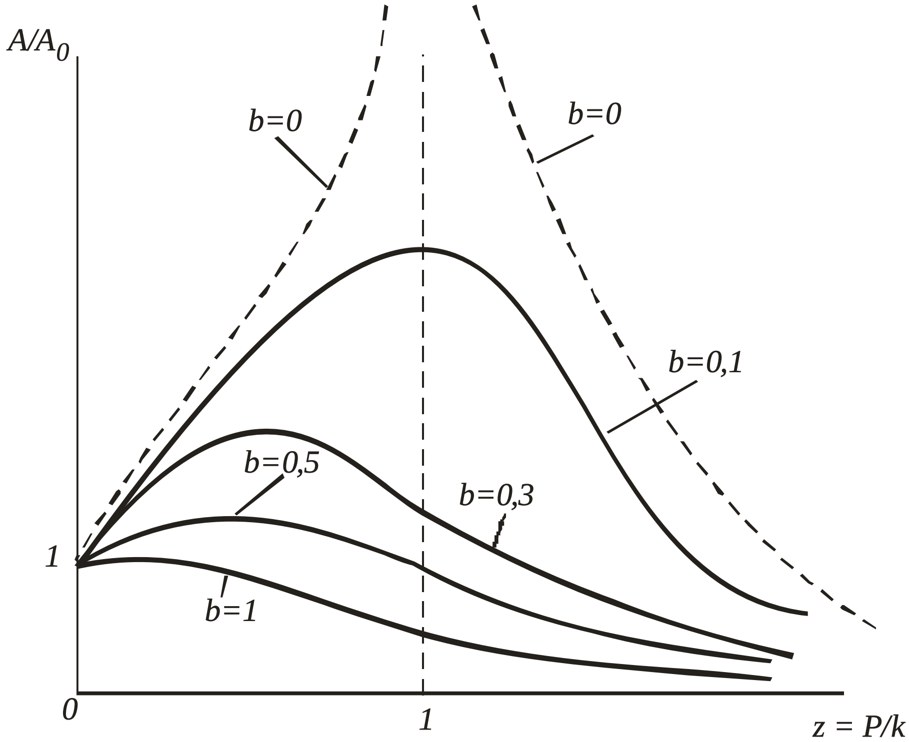


Рисунок 55

Проведені дослідження дозволяють зробити додаткові висновки про вплив коефіцієнта динамічності (а таким чином і амплітуди). Так максимуму амплітуда набуває не при резонансі, а коли $z_2 = \sqrt{1 - 2b^2}$, що відповідає критичному значенню кругової частоти сили, що збурює коливання:

$$p_{кр} = k\sqrt{1 - 2\frac{n^2}{k^2}} = \sqrt{k^2 - 2n^2}\,.$$

Тому

$$A_{\max} = \frac{A_0}{\sqrt{(1 - z_2^2)^2 + 4b^2 z_2^2}} = \frac{h}{2n\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{A_0}{2b\sqrt{1 - b^2}}\,.$$

Для малих b у порівнянні з одиницею приблизно

$$A_{\max} \approx \frac{A_0}{2b}.$$

Амплітуда змушених коливань при резонансі $A_{рез}$ виходить із рівняння (123) при $z = 1$:

$$A_{рез} = \frac{h}{2nk} = \frac{A_0}{2b} < A_{\max},$$

тобто амплітуда змушених коливань при резонансі менше максимальної амплітуди, що досягається при $p_{кр} = \sqrt{k^2 - 2n^2}$.

Критична кругова частота, за якої амплітуда вимушених коливань досягає максимуму, зменшується зі зростанням коефіцієнта затухання. Величини $A_{\max}$ і $A_{рез}$ теж при цьому зменшуються.

Дослідимо тепер вплив лінійного опору на зсув фаз. Відповідно до рівняння (121)

$$tge = -\frac{2np}{k^2 - p^2} = \frac{2bz}{1 - z^2}, \quad 0 \le e \le p. \tag{124}$$

Тангенс зсуву фаз e виражається простою залежністю від z. Урахуємо, що:

- при $z = 0$, $e = 0$;
- при $0 < z < 1$, $0 < e < p/2$;
- при $z = 1$, $e = p/2$;
- при $1 < z < \infty$, $p/2 < e < p$; $z \to \infty$, $e \to p$.

Графік зміни зсуву фаз (фазочастотна характеристика системи) залежно від відносної частоти z сили, збурює коливання фіксованих значень відносного коефіцієнта загасання b зображений на рисунку 56.

Зсув фаз при резонансі не залежить від лінійного опору. Він дорівнює $\frac{p}{2}$.

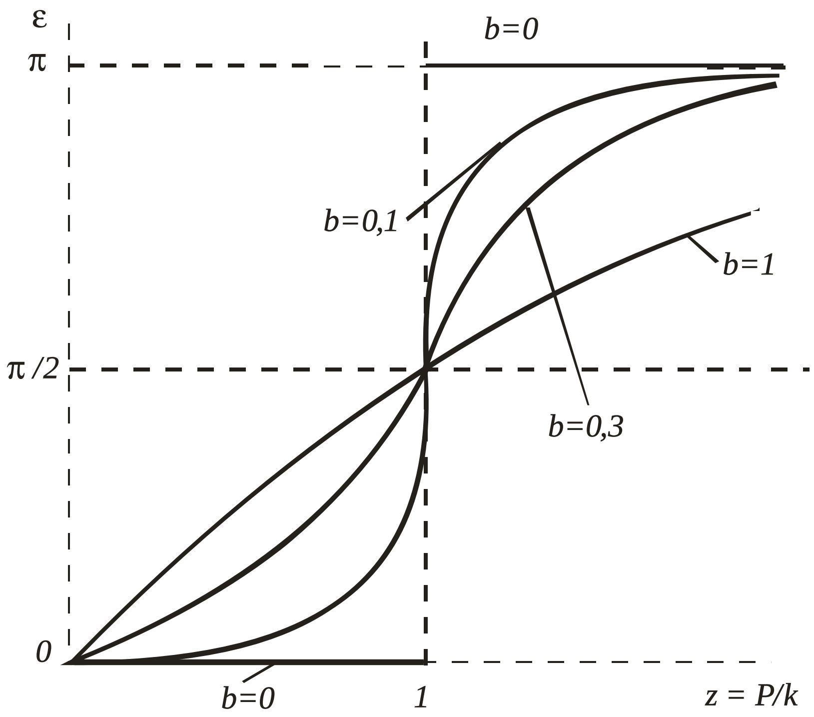


Рисунок 56

12.7.4 Загальні властивості змушених коливань

1 Змушені коливання при лінійному опорі є незатухаючими, тобто амплітуда їх стала, як при відсутності резонансу, так і при резонансі.

2 Лінійний опір не впливає на частоту змушених коливань, що збігається із частотою сили, що збурює коливання.

3 Змушені коливання при лінійному опорі не залежать від початкових умов, так само, як вони не залежать від них при відсутності опору.

4 Амплітуда змушених коливань прагне до нуля швидше при лінійному опорі зі збільшенням відносної частоти сили, що збурює коливання, чим при відсутності опору.

12.7.5 Основи віброзахисту

Захищати фундаменти й кріплення, що здійснюють коливання слід насамперед від змушених коливань, тому що власні коливання при наявності опору швидко згасають.

Сили від коливальних систем з одним ступенем вільності пропорційні прискоренням, пропорційні амплітудам коливань.

Існують два основних способи зменшення амплітуди змушених коливань. Перший складається в значному розносі частот змушених і власних коливань систем, що має місце при більших значеннях $z = \frac{p}{k}$. Другий спосіб складається у збільшенні коефіцієнта опору за допомогою демпферів. Процес зменшення амплітуди коливань за рахунок збільшення амплітуди коливань і за рахунок збільшення коефіцієнта опору називається демпфіруванням коливань.

12.8 Вільні коливання механічної системи з двома ступенями вільності

Розглянемо консервативну систему з двома ступенями вільності, що рухається в межах положення стійкої рівноваги. Використаємо рівняння Лагранжа з точністю до величин другого порядку малості:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0, \tag{125}$$

де $L = T - П$ кінетичний потенціал системи, здобутий на підставі формул (69) і (70) для потенціальної енергії:

$$П = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} c_{i,k}^{0} q_1 q_k \;\text{ і }\; T = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{i,k}^{0} q_i q_k .$$

Беручи до уваги симетрію коефіцієнтів $a_1 = a_2$ і $c_{12} = c_{21}$, знаходимо:

$$L = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2) - \frac{1}{2}(c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{12}q_2^2). \tag{126}$$

Тут і далі індекс «0» опускаємо в позначеннях a_{ik}^0, c_{ik}^0, b_{ik}^0. Підставляємо вираз (136) в рівняння (125) та після перетворень знаходимо диференціальне рівняння руху системи.

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = 0; \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 = 0. \end{aligned} \tag{127}$$

Рівняння (127) – система двох лінійних однорідних рівнянь другого порядку відносно узагальнених координат системи q_1 та q_2 зі сталими коефіцієнтами. Розв’язок цієї системи шукаємо у вигляді

$$q_1 = A\sin(kt + a), \quad q_2 = B\sin(kt + a), \tag{128}$$

де A, B, k, a – сталі, які необхідно підбирати так, щоб розв’язок (128) задовольняв диференціальне рівняння (127) та задані початкові умови. Підставляючи розв’язок (128) у рівняння (127), знайдемо:

$$\begin{aligned} \left(-a_{11}k^2 + c_{11}\right)A + \left(-a_{12}k^2 + c_{12}\right)B = 0; \\ \left(-a_{21}k^2 + c_{21}\right)A + \left(-a_{22}k^2 + c_{22}\right)B = 0. \end{aligned} \tag{129}$$

Рівності (129) – система двох однорідних алгебричних рівнянь відносно коефіцієнтів *A* і *B*. Ця система має ненульовий розв’язок, якщо її визначник дорівнює нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -a_{11}k^2 + c_{11} & -a_{12}k^2 + c_{12} \\ -a_{21}k^2 + c_{21} & -a_{22}k^2 + c_{22} \end{vmatrix} = 0. \tag{130}$$

Рівняння (130) є алгебричним рівнянням другого ступеня відносно k^2 і називається *характеристичним рівнянням* системи (127). Записуємо його у вигляді

$$b_0 + b_1k^2 + b_2k^4 = 0, \tag{131}$$

де $b_0 = c_{11}c_{12} - c_{12}^2$; $\quad b_1 = 2a_{12} - a_{11}c_{11}$; $\quad b_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$.

З рівняння (131) випливає, що корені k_1^2 та k_2^2 є функціями коефіцієнтів інерції a_{jk} та коефіцієнтів пружності $c_{jk.}$ Можна довести, що у даному випадку обидва корені додатні. Якщо вони були б від'ємними, то k_1 і k_2 були б уявними або комплексними. Проте тоді б на підставі рівняння (128)

$$q_1 = A\sin(ikt + a) = A(\sin ikt\cos a + \cos ikt\sin a) = A(ishkt\cos a + chkt\sin a).$$

Аналогічно

$$q_2 = B(ishkt\cos a + chkt\sin a),$$

де $shkt$ та $chkt$ – необмежні функції. Таким чином, цей розв'язок суперечив би початковому припущенню, що координати q_1 та q_2 є малими.

Розв'язком рівняння (131) є дві пари коренів $\pm k_1, \pm k_2$. Покажемо, що частинний розв'язок (128), який має $+k_2$, лінійно виражається через частинний розв'язок, що має $-k_1$. Дійсно, оскільки величина a не вибрана, надамо їй значення $a = p - a'$. Тоді

$$\sin(k_1 t + a)\sin[p - (-k_1 t + a')] = \sin(-k_1 t + a').$$

Загальний розв'язок системи (127) є комбінацією незалежних частинних розв'язків, тому надалі враховуємо тільки два корені, що є додатними. Величини $+k_1, +k_2$ називаються *головними частотами системи*.

Надалі припускаємо, що $k_1 \neq k_2$, при цьому $k_1 < k_2$, k_1 – частота основного тону.

Якщо в систему (129) підставити значення $+k_1$, то одне з рівнянь цієї системи буде висновком другого, оскільки визначник системи перетворюється в нуль. Таким чином, із системи (129) можна лише визначити відношення коефіцієнтів *A* і *B*. Дістанемо:

$$\frac{B_1}{A_1}=\frac{a_{11}k_1^2-c_{11}}{-a_{12}k_1^2+c_{12}}=c_1,\quad \frac{B_2}{A_2}=\frac{a_{11}k_2^2-c_{11}}{-a_{12}k_2^2+c_{12}}=c_2. \tag{132}$$

Величина c_1 та c_2 називаються *коефіцієнтами розподілу*.

З рівностей (132) знаходимо зв'язок між шуканими коефіцієнтами, що відповідають різним частотам:

$$B_1=c_1A_1,\, B_2=c_2A_2. \tag{133}$$

Частинний розв'язок (128), що відповідає частоті основного тону k_1,

$$q_1^{(1)}=A_1\sin(k_1t+a_1),\; q_2^{(1)}=B_1\sin(k_1t+a_1) \tag{134}$$

визначає ту частину руху системи, що називається *першим головним коливанням системи*.

Частинний розв'язок

$$q_1^{(2)}=A_2\sin(k_2t+a_2),\; q_2^{(2)}=B_2\sin(k_2t+a_2) \tag{135}$$

є другим головним коливанням системи. Повний рух системи визначається загальним розв'язком системи (127), який є сумою незалежних частинних розв'язків:

$$\begin{aligned} q_1&=q_1^{(1)}+q_1^{(2)}=A_1\sin(k_1t+a_1)+A_2\sin(k_2t+a_2);\\ q_2&=q_2^{(1)}+q_2^{(2)}=c_1A_1\sin(k_1t+a_1)+c_2A_2\sin(k_2t+a_2). \end{aligned} \tag{136}$$

При складанні функції q_2 використані співвідношення (134). Сталі A_1, A_2, a_1, a_2 визначаються за початковими умовами руху системи: при $t=0$

$$q_1(0)=q_{10};\quad q_2(0)=q_{20};\quad \dot q_1(0)=\dot q_{10};\quad \dot q_2=(0)=\dot q_{20}.$$

За початковими умовами складаються чотири рівняння для визначення сталих.

З рівностей (136) випливає, що рух консервативної системи в межах положення стійкої рівноваги є наслідком накладання гармонічних рухів, що мають різні частоти. Такий рух системи називається *вільними коливаннями системи*.

12.9 Головні координати механічної системи

Головними координатами механічної системи називаються такі узагальнені координати q_a*, в яких вирази кінетичної та потенціальної енергії системи набирають канонічного вигляду:*

$$T=\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}t_a\dot{q}_a^2, \qquad \Pi=\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}\Pi_a q_a^2 . \tag{137}$$

Задача пошуку головних координат *є узагальненою задачею аналітичної геометрії*: знайти таке перетворення узагальнених координат q_j до координат q_a, при якому одночасно дві квадратичні форми набирають канонічного вигляду (137).

$$T=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k, \qquad \Pi=\frac{1}{2}\sum_{j,k}^{m}c_{jk}q_j q_k . \tag{138}$$

Якщо для консервативної системи знайти головні координати, то рівняння Лагранжа II роду, що описують рух системи в цих координатах, розкладаються на сукупність S незалежних рівнянь другого порядку відносно цих координат.

Дійсно, рівняння Лагранжа II роду відносно координат q_a мають вигляд

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}-\frac{\partial L}{\partial q_a}=0 \quad (a=1,2,...,S), \tag{139}$$

де $L=T-\Pi$.

Маючи на увазі вираз (137), знаходимо:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a\, 0} = t_a \dot{q}_a\,; \quad \frac{\partial L}{\partial q_a} = -\frac{\partial \varPi}{\partial q_a} = -\varPi q_a\,. \tag{140}$$

Рівності (140) підставляємо в рівняння (139). Після очевидних перетворень матимемо сукупність S незалежних рівнянь другого порядку відносно q_a:

$$\ddot{q}_a + l_a^2 q_a = 0 \qquad (a = 1,2,...,S), \tag{141}$$

де $l_a^2 = \dfrac{\varPi_a}{t_a}$.

Механічна система, рух якої описується диференціальним рівнянням, що має вигляд $\ddot{q} + l^2 q = 0$, *називається гармонічним осцилятором.*

Маючи на увазі структуру рівнянь (141), робимо висновок, що розглянута система подана сукупністю S гармонічних осциляторів.

Наведемо один з можливих способів знаходження головних координат.

Розглядаємо функції

$$q_1 = q_1^{(1)} = A_1 \sin(k_1 t + a_1), \qquad q_2 = q_1^{(2)} = A_2 \sin(k_2 t + a_2) \tag{142}$$

у формулах (132), (135). Доведемо, що вони є головними координатами консервативної системи з двома ступенями вільності, що рухається в межах положення стійкої рівноваги, тобто доведемо, що кінетична та потенціальна енергії системи в цих координатах визначаються за формулами:

$$T = \frac{1}{2}\left(t_1 \dot{q}_1^2 + t_2 \dot{q}_2^2\right); \quad \varPi = \frac{1}{2}\left(\varPi_1 q_1^2 + \varPi_2 q_2^2\right). \tag{143}$$

Рівності (136) на підставі позначень (142) набирають вигляду

$$q_1 = q_1 + q_2;\; q_2 = c_1 q_1 + c_2 q_2. \tag{144}$$

Підставляючи ці вирази у співвідношення

$$T = \frac{1}{2}\left(a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2\right);$$
$$\varPi = \frac{1}{2}\left(c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1 q_2 + a_{22}q_2^2\right),$$

знайдемо:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\left(t_1\dot{q}_1^2 + t_2\dot{q}_2^2 + 2t_3\dot{q}_1\dot{q}_2\right); \\ \varPi &= \frac{1}{2}\left(\varPi_1 q_1^2 + \varPi_2 q_2^2 + 2\varPi_3 q_1 q_2\right), \end{aligned} \tag{145}$$

де $t_a, \varPi_a$ виражаються через a_{jk}, c_{jk} і c_1, c_2. Пропонуємо самостійно знайти аналітичні вирази цих величин.

Рівняння Лагранжа II роду відносно координат q_1 та q_2 мають вигляд

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0,\; \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0, \tag{146}$$

де $L = T - \varPi$.

Підставляючи в рівняння (146) вирази (145), матимемо:

$$\begin{aligned} t_1\ddot{q}_1 + t_3\ddot{q}_2 + \varPi_1 q_1 + \varPi_3 q_2 &= 0; \\ t_3\ddot{q}_1 + t_2\ddot{q}_2 + \varPi_3 q_1 + \varPi_2 q_2 &= 0. \end{aligned} \tag{147}$$

На підставі рівностей (142) знаходимо:

$$\ddot{q}_1 = -k_1^2 q_1,\; \ddot{q}_2 = -k_2^2 q_2; \tag{148}$$

тоді рівняння (147) можна подати в такому вигляді:

$$\begin{aligned}&\left(-t_1k_1^2+\Pi_1\right)q_1+\left(-t_3k_2^2+\Pi_3\right)q_2=0;\\&\left(-t_3k_1^2+\Pi_3\right)q_1+\left(-t_2k_2^2+\Pi_2\right)q_2=0.\end{aligned}\tag{149}$$

Оскільки функції q_1 та q_2 лінійно незалежні, то рівності (149) мають місце, якщо співмножники при цих функціях дорівнюють нулю:

$$-t_1k_1^2+\Pi_1=0;\quad -t_2k_2^2+\Pi_2=0;\tag{150}$$

$$-t_3k_2^2+\Pi_3=0;\quad -t_3k_1^2+\Pi_3=0.\tag{151}$$

З рівностей (150) і (151) знаходимо:

$$k_1^2=\frac{\Pi_1}{t_1};\quad k_2^2=\frac{\Pi_2}{t_2}.\tag{152}$$

Ці співвідношення визначають головні частоти системи при описанні її руху в головних координатах. Через безпосередні розрахунки можна переконатися в тому, що вони збігаються з тими значеннями головних частот, які є коренями рівняння частот (131). Цей збіг показує, що головні частоти системи є такими її характеристиками, які не залежать від вибору узагальнених координат, тобто від способу описання її руху. З рівностей (151) маємо:

$$t_3\left(k_1^2-k_2^2=0\right).$$

Згідно з припущенням $k_1^2\neq k_2^2$, робимо висновок, що $t_3=c$. Тому і $\Pi=0$. У цьому випадку рівність (145) набуває канонічного вигляду (143), а рівняння Лагранжа другого роду вигляду (3.147) розкладаються на два незалежних рівняння відносно q_1 і q_2. Через те q_1 і q_2 є головними координатами системи.

Таким чином, запропонований спосіб знаходження головних координат системи з двома степенями вільності полягає в такому.

Вибираємо довільні узагальнені координати q_1 і q_2 та визначаємо закон зміни їх за часом шляхом інтегрування рівнянь Лагранжа. Далі з рівнянь (144) знаходимо головні координати системи:

$$q_1 = \frac{q_2 - c_2 q_1}{c_1 - c_2};\ q_2 = \frac{c_1 q_1 - q_2}{c_1 - c_2}. \qquad (153)$$

Рівняння згасаючих і змушених коливань системи з двома степенями вільності отримуються аналогічно розглянутому випадку вільних коливань таких систем.

12.10 Методика і приклади розв'язання задач механічної системи

Приклад 21. *Система складається зі стрижня OB з насадженою на нього кулею B; стрижень закріплений шарнірно в точці O (рис.57). Момент інерції коливальної системи щодо горизонтальної осі, яка проходить через точку O, перпендикулярна до рисунка, дорівнює J. До стрижня прикріплена в точці A пружина, коефіцієнт жорсткості якої дорівнює c. Другий кінець пружини D здійснює задані вертикальні коливання відповідно до рівняння $y = H\cos pt$. До точки B прикладена сила в'язкого опору, пропорційна швидкості $R = m \cdot V$, де m - коефіцієнт пропорційності.*

Визначити рівняння коливань, що змушують кулю B максимально розтягувати пружину і силу, що викликає коливання і яка прикладена в точці D, якщо $OA = a$; $OB = l$.

Розв'язання

Кут j – узагальнена координата. Кут j будемо відраховувати від положення статичної рівноваги, x – переміщення точки A: $x = aj$.

Потенційна енергія системи:

$$П = \frac{c - (x - y)^2}{2} = \frac{c - (a - j - H\cos pt)^2}{2}.$$

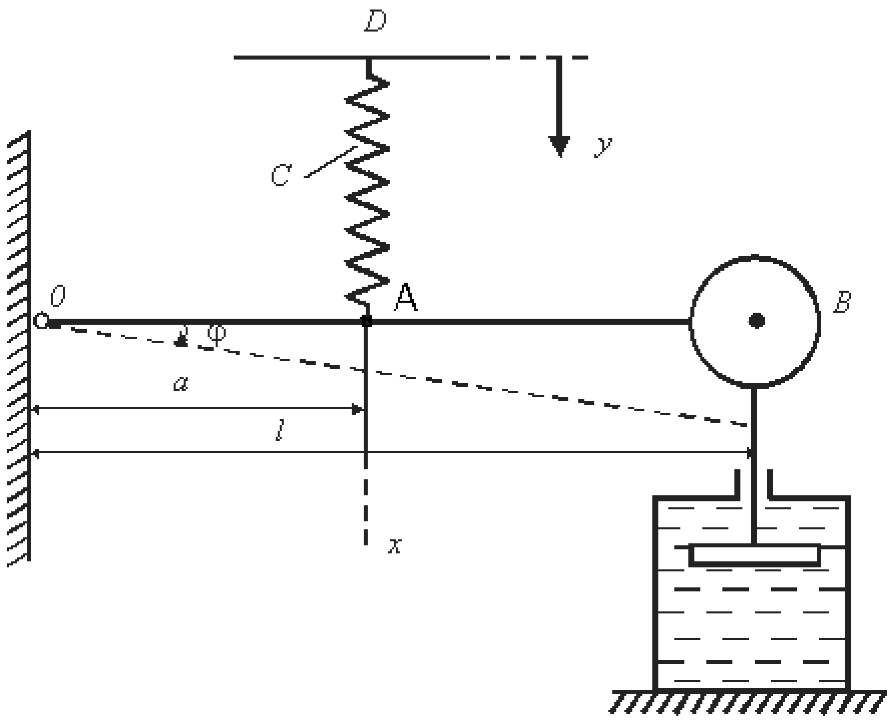


Рисунок 57

Кінетична енергія:

$$T = \frac{J\dot{\varphi}^2}{2}.$$

Дисипативна функція Релея має вигляд

$$\Phi = \frac{1}{2} b\left(a+b\right)^2 \dot{\varphi}^2.$$

Сила опору:

$$R_x = -bl\dot{\varphi}.$$

Рівняння Ланграnжа

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial\varphi} = Q^{\Pi} + Q^{\Phi} + Q^{B}.$$

Послідовно знаходимо:

$$\frac{\partial T}{\partial j} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{j}} = J\dot{j}; \qquad \frac{\partial}{dT}\frac{\partial T}{\partial \dot{j}} = J\ddot{j};$$

$$Q^{П} = -\frac{\partial П}{\partial j} = -C(aj - H\cos pt)a;$$

$$Q^{Ф} = \frac{R_x l * dj}{dj} = -bl^2 * j \;; \; Q^{Ф} = -\frac{\partial Ф}{\partial j};$$

$$Q^{B} = 0.$$

Підставляючи ці значення в рівняння Лагранжа, одержимо:

$$Jj + bl^2 j + ca^2 j = cHa\cos pt,$$

або

$$\ddot{j} + 2n\dot{j} + k^2 j = h\cos pt,$$

де

$$n = \frac{bl^2}{2J}; \qquad k^2 = \frac{ca^2}{J}; \qquad h = \frac{cHa}{J}.$$

Амплітуда змушених коливань

$$j_{\max} = \frac{h}{\sqrt{\left(k^2 - p^2\right)^2 + 4n^2 p^2}}.$$

Зсув фаз

$$tge = \frac{2np}{k^2 - p^2}.$$

Рівняння змушених коливань центра кулі B:

$$x_B = j_{\max} l \cos(pt - e).$$

Рівняння змушених коливань точки A:

$$x = x_A = j_{\max} \cdot a \cdot \cos(pt - e) = A\cos(pt - e), \text{ де } A = a j_{\max}.$$

Деформація пружини $l = x - y = A\cos(pt - e) - H\cos pt$.

Приклад 22. *Механічна система (рис.58), що знаходиться в рівновазі складається з ступінчатих коліс 1 та 2 з радіусами степенів* r_1, R_1, r_2, R_2*, стрижня* 3*, вантажу 4, невагомих стрижнів 5 та 6, двох пружин 6 та 7 з коефіцієнтами жорсткості* c_1 *та* c_2.

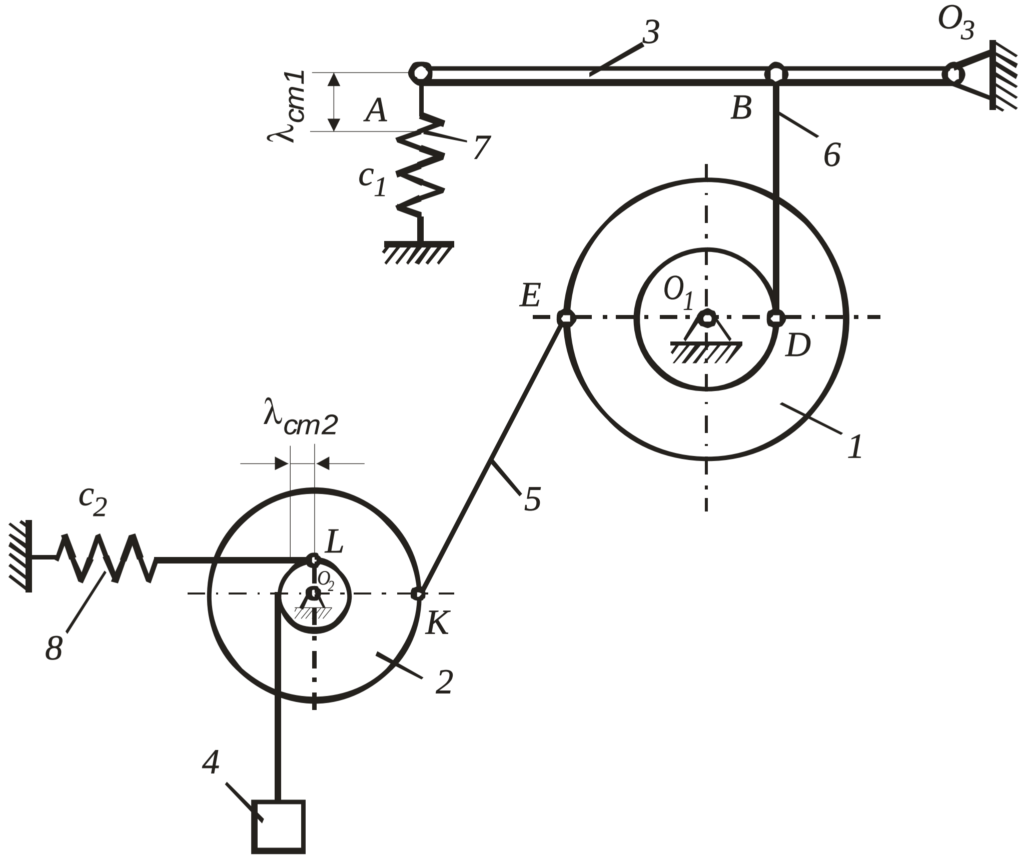


Рисунок 58

Розв'язання

Дано:

$m_1 = 20кг, m_2 = 16кг, m_3 = 8кг, m_4 = 10кг, r_1 = 0{,}2м, R_1 = 0{,}4м, r_2 = 0{,}12м,$

$R_2 = 0{,}18м, O_3A = l = 1м, O_3B = l/3, c_1 = 1000Н/м, c_2 = 1200Н/м,$

радіуса інерції $r_1 = 0{,}3м, r_2 = 0{,}15м$.

Визначити: Частоту k та період t малих коливань системи навколо стану рівноваги.

1 Розглянемо довільне положення системи, коли вона виведена із стану рівноваги та робить малі коливання (рис.59).

Система має один ступень вільності. Виберемо за узагальнену координату кут j повороту колеса 1, вважаючи j малим, і складемо для системи рівняння Лагранжа. Оскільки всі діючі активні сили (сила пружності та сила тяжкості) потенційні, виражаємо узагальнену силу Q через потенційну енергію П системи. Тоді вихідним рівнянням буде:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{\partial \dot{j}}\right) - \frac{\partial T}{\partial j} = Q,$$

де
$$Q = -\frac{\partial П}{\partial j}. \qquad (а)$$

При дослідженні малих коливань у рівнянні (а) величини $j, \dot{j}$ дуже малі, тому похідні від цих величин більш високого порядку відкидаються. Для цього треба знайти вирази T і П з точністю до j^2 і $\dot{j}^2$, бо до (а) входять перші похідні від T і П по j та $\dot{j}$, а при диференціюванні многочленна його ступінь знижується на одиницю.

2 Визначимо кінетичну енергію T системи, яка дорівнює сумі енергій всіх вагомих тіл:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4. \qquad (б)$$

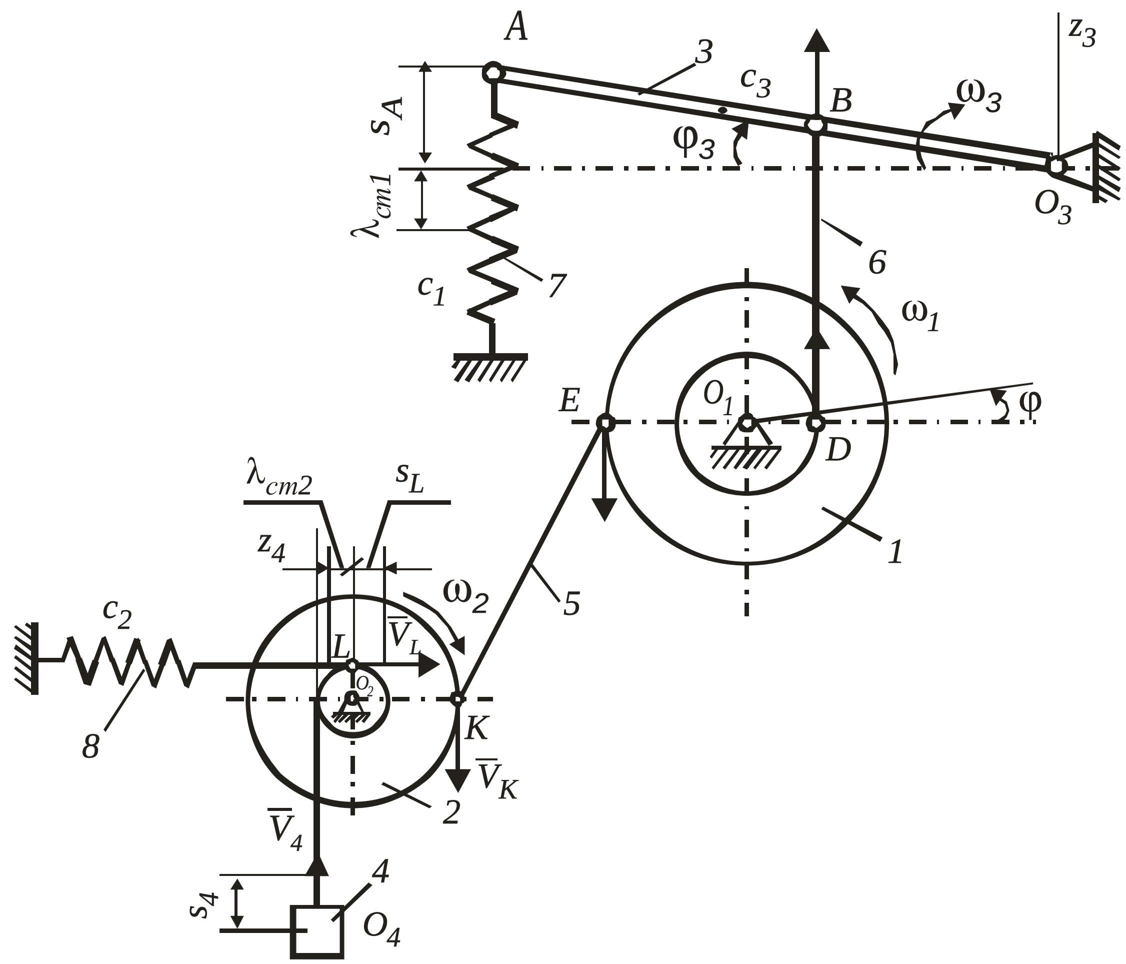


Рисунок 59

Оскільки колеса 1,2 і стрижень 3 обертаються навколо осей O_1, O_2 і O_3 відповідно, а вантаж 4 рухається поступово, то:

$$T_1 = \frac{J_{01}\omega_1^2}{2}; T_2 = \frac{J_{02}\omega_2^2}{2};\ T_3 = \frac{J_{03}\omega_3^2}{2}; T_4 = \frac{m_{04}V_4^2}{2}, \qquad \text{(в)}$$

де
$$J_{0_1} = m_1 r_1^2,\ J_{0_2} = m_2 r_2^2,\ J_{0_3} = \frac{m_3 l^2}{3}. \qquad \text{(д)}$$

Усі швидкості, що входять до рівності (в), треба виражати через узагальнену швидкість $\dot{\varphi} = \omega_1$ З огляду на те, що φ – мала величина, можна вважати:

$$V_D = V_B = \omega_1 r_1 = r_1\dot{\varphi}; \quad \omega_3 = \frac{V_B}{O_3B} = 3\frac{r_1}{l}\dot{\varphi};$$
$$V_E = V_K = \omega_1 R_1 = R_1\dot{\varphi}; \quad \omega_2 = \frac{V_K}{R_2} = \frac{R_1}{R_2}\dot{\varphi}; \quad V_4 = V_L = \omega_2 r_2 = \frac{R_1 r_2}{R_2}\dot{\varphi}. \qquad \text{(ж)}$$

Підставляючи величини (д) та (ж) в рівності (в), отримаємо із (б):

$$T = \frac{1}{2}a_0\dot{\varphi}^2, \text{ де } a_0 = m_1 r_1^2 + m_2\frac{R_1^2 r_2^2}{R_2^2} + 3m_3 r_1^2 + m_4\frac{R_1^2 r_2^2}{R_2^2}. \qquad \text{(к)}$$

Звідси знаходимо:

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = a_0\dot{\varphi}, \quad \frac{\partial T}{\partial\varphi} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right) = a_0\ddot{\varphi}. \qquad \text{(л)}$$

Визначимо потенційну енергію (П) системи, враховуючи, що для пружини $П = 0{,}5c\lambda^2$, де λ – деформація пружини, а для поля сил тяжіння $П = mgz_c$, де z_c – координата центра тяжіння (ось z спрямована за вертикаллю вгору). Тоді для всієї системи:

$$П = 0{,}5c_1\lambda_1^2 + 0{,}5c_2\lambda_2^2 + m_1 g z_{c_1} + m_2 g z_{c_2} + m_3 g z_{c_3} + m_4 g z_{c_4}, \qquad \text{(м)}$$

де величини $\lambda_1, \lambda_2, z_{c_1}, z_{c_2}, z_{c_3}, z_{c_4}$ повинні бути виражені через φ.

Визначаючи λ_1, λ_2 врахуємо, що в стані рівноваги пружини можуть мати деякі статичні (початкові) деформації $\lambda_{ст_1}, \lambda_{ст_2}$, необхідні для збереження рівноваги (в нашому випадку для зрівноваження сил тяжкості $\overline{P}_3$ та $\overline{P}_4$). У довільному стані пружини отримають додаткові деформації, рівні s_A, s_L, причому з огляду на те, що φ мала величина, можна вважати $s_A = \varphi_3 l$ і $s_L = \varphi_2 r_2$.

Враховуючи, що залежність між малими переміщеннями буде така ж як і між відповідними швидкостями, отримаємо:

$$j_2 = \frac{R_1}{R_2} j; \quad j_3 = 3\frac{r_1}{l} j \text{ та відповідно, } s_A = 3r_1 j,\ s_L = \frac{R_1 r_2}{R_2} j.$$

Тоді

$$l_1 = l_{cm_1} + s_A = l_{cm_1} + 3r_1 j$$

$$l_2 = l_{cm_2} + s_L = l_{cm_2} + \frac{R_1 r_2}{R_2} j \ .$$

Для z_{c_1} і z_{c_2}, які взяли початок координат в точках O_1 і O_2, відповідно, отримаємо $z_{c_1} = z_{c_2} = 0$. Для z_{c_3}, спрямовуючи вісь z_3 з точки O_3 вгору, отримаємо $z_{c_3} = 0{,}5l\sin(j_3)$. У випадку малих кутів можна вважати $\sin(j_3) = j$, (у випадку, коли стрижень вертикальний, потрібно використати розклад $\cos j = 1 - \frac{j^2}{2}$), тоді:

$$z_{c_3} = \frac{3}{2} r_1 j \ .$$

Для z_{c_4}, суміщаючи початок координат O_4 з положенням центра тяжкості вантажу при рівновазі, отримаємо $z_{c_4} = s_4$, де $s_4 = \frac{R_1 r_2}{R_2} j$ – переміщення вантажу.

Підставляючи всі знайдені величини в рівність (м), отримаємо:

$$\Pi = \frac{c_1}{2}\left(l_{cm_1} + 3r_1 j\right)^2 + \frac{c_2}{2}\left(l_{cm_2} + \frac{R_1 r_2}{R_2} j\right)^2 + g\left(\frac{3}{2} m_3 r_1 + m_4 \frac{R_1 r_2}{R_2}\right) j \ . \qquad \text{(н)}$$

4 Визначимо узагальнену силу:

$$Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial j} = -\left[3c_1 r_1\left(l_{cm_2} + 3r_1 j\right) + c_2\frac{R_1 r_2}{R_2}\left(l_{cm_2} + \frac{R_1 r_2}{R_2} j\right) + \right.$$
$$\left. + g\left(\frac{3}{2} m_3 r_1 + m_4\frac{R_1 r_2}{R_2}\right)\right]. \qquad \text{(п)}$$

У стані рівноваги, тобто коли $j = 0$, повинно бути, щоб і $Q = 0$. Тоді із рівності (п) отримаємо:

$$3c_1 r_1 l_{cm_1} + c_2 + \frac{R_1 r_2}{R_2} l_{cm_2} = -g\left(\frac{3}{2} m_3 r_1 + m_4\frac{R_1 r_2}{R_2}\right). \qquad \text{(р)}$$

Підставляючи (р) в (п), знайдемо остаточно:

$$Q = -bj\ ,$$

де $$b = 9c_1 r_1^2 + c_2\frac{R_1^2 r_2}{R_2}. \qquad \text{(с)}$$

5 Складаємо рівняння Лагранжа Підставивши значення (л) та (с) в (б), отримаємо $a_0\ddot{j} = -bj$, або:

$$\ddot{j} + k^2 j = 0, \qquad \text{(т)}$$

де $$k^2 = \frac{b}{a_0} = \frac{9c_1 r_1^2 R_2^2 + c_2 R_2^2 r_2^2}{m_1 r_1^2 R_2^2 + m_1 r_2^2 R_1^2 + 3m_3 r_1^2 R_2^2 + m_4 R_1^2 r_2^2}.$$

З теорії коливань відомо, що коли рівняння приведено до вигляду (т), то в ньому величина k і є шуканою кутовою частотою, а період $t = \frac{2p}{k}$. При заданих числових значеннях, зробивши відповідні розрахунки, отримаємо: $k = 9{,}21c^{-1}$; $t = 0{,}682c$.

Приклад 23. *Розглянемо попередній приклад 22 для випадку, коли діючи сили не являються потенціальними.*

Розв'язання

За узагальнену координату вибираємо той же кут j, вважаючи його малим, і складемо для системи рівняння Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial j}\right)-\frac{\partial T}{\partial j}=Q. \tag{а}$$

Для кінетичної енергії (*T*) системи і для відповідних похідних отримаємо, як і раніше, значення (к) та (л).

Щоб знайти узагальнену силу Q, треба зобразити на рисунку 60 діючі активні сили, що виконують роботу при переміщенні системи, тобто сили пружності $\overline{F}_1, \overline{F}_2$ і сили тяжіння $\overline{P}_3, \overline{P}_4$.

Тепер надаємо системі можливого переміщення, при якому кут j одержує позитивний приріст dj, і обчислюємо роботу dA всіх названих сил на цьому переміщенні. Отримаємо:

$$dA=-F_1 l\cos(j_3)dj_3-P_3\frac{1}{2}\cos(j_3)dj_3-F_2 dS_L-P_4 dS_4. \tag{б}$$

У рівності (б) переміщення виражається через узагальнену координату j. За аналогією знайдемо:

$$dj_3=3\frac{r_1}{l}dj;\ ds_L=ds_4=\frac{R_1 r_2}{R_2}dj\ . \tag{в}$$

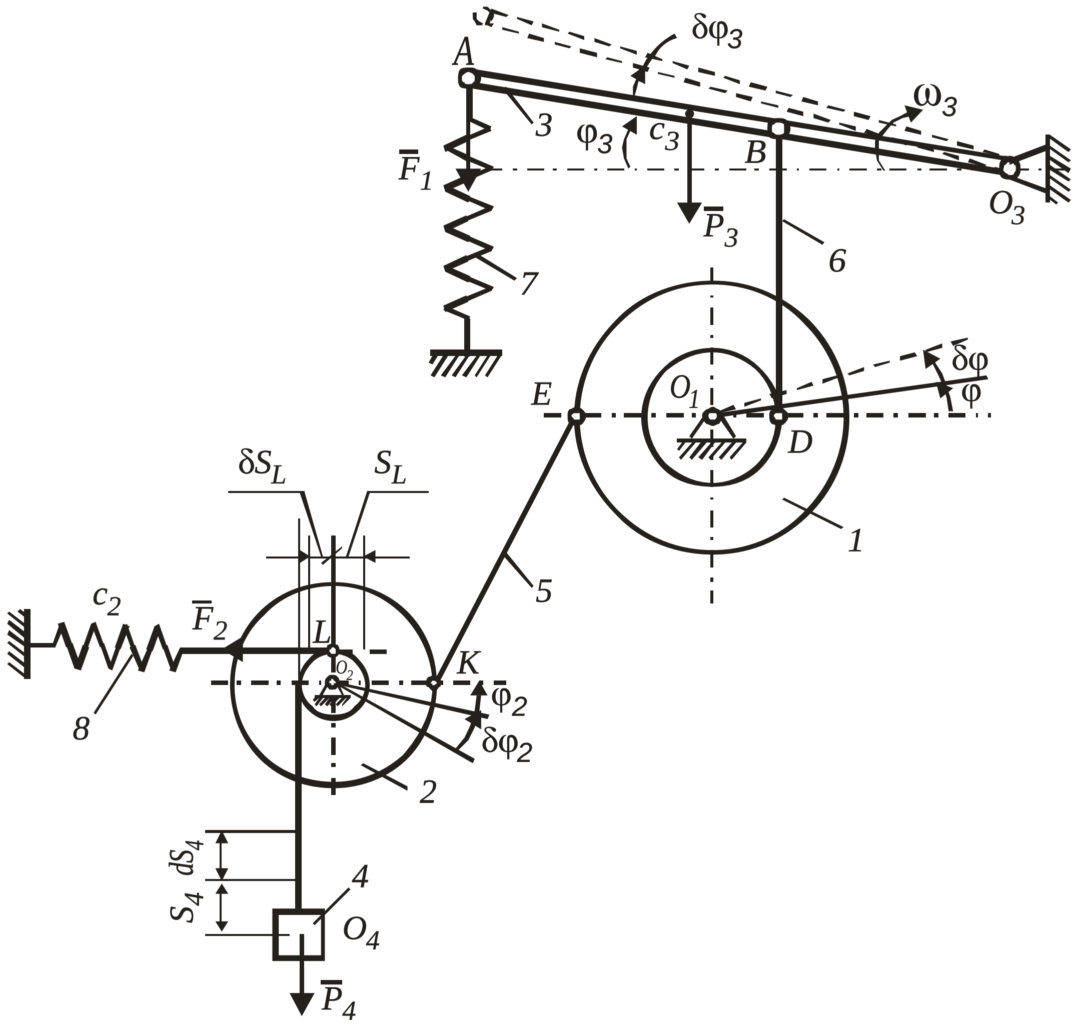


Рисунок 60

Визначимо значення сил пружності $\overline{F}_1$ та $\overline{F}_2$ за модулем:

$$F_1 = c_1 l_1 = c_1\left(l_{cm_1} + 3r_1 j\right),\ F_2 = c_2 l_2 = c_2\left(l_{cm_2} + \frac{R_1 r_2}{R_2} j\right). \qquad (д)$$

Підставивши величини (в) і (д) в рівність (б) і врахувавши, що $P_3 = m_3 g$, а $P_4 = m_4 g$, та, зважаючи на те, що j – мала величина, можна вважати $\cos(j_3) = 1$, приведемо остаточно рівність (б) до вигляду:

$$dA = \left[\left(3c_1 r_1 l_{cm_1} + c_2 \frac{R_1 r_2}{R_2} l_{cm_2}\right) + \left(9c_1 r_1^2 + c_2 \frac{R_1 r_2^2}{R_2^2}\right) j + \left(\frac{3}{2} m_3 r_1 + m_4 \frac{R_1 r_2}{R_2}\right) g\right] dj\ .$$

Коефіцієнт при dj в правій частині отриманої рівності і є пошуковою узагальненою силою. Отже,

$$Q = -\left[\left(3c_1 r_1 l_{cm_1} + c_2 \frac{R_1 r_2}{R_2} l_{cm_2}\right) + \left(9c_1 r_1^2 + c_2 \frac{R_1 r_2^2}{R_2^2}\right) j + \left(\frac{3}{2} m_3 r_1 + m_4 \frac{R_1 r_2}{R_2}\right) g\right]. \text{(ж)}$$

Враховуючи, що при рівновазі $j = 0$ та $Q = 0$, отримаємо вираз (р) і тоді остаточно знайдемо:

$$Q = -\left(9c_1 r_1^2 + c_2 \frac{R_1^2 r_2^2}{R_2^2}\right) j \ . \qquad \text{(к)}$$

Вираз (к) повністю співпадає з (с) і дає змогу прийти до отриманого рішення в попередньому прикладі.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 **Аркуша, А.И.** Техническая механика: Теоретическая механика и сопротивление материалов : учебное пособие. – 3-е изд., исправл.– М. :Высш.шк., 2000. – 352 с.

2 **Яблонский, А.А.** Курс теоретической механики : учебник для технических вузов. – 8-е изд.,стереот. – Спб. : Лань, 2001. – 768 с.

3 Короткий довідник з теоретичної механіки : навч. посібник/ І.П. Смерека [та ін.]. – Львів : Інтеллект – Захід, 2001. – 240 с.

4 **Тарг, С.М.** Краткий курс теоретической механики : ученик для вузов. – 12 изд., стер. – М. : Высш.шк., 2002. – 416 с.

5 Сборник задач для курсовых работпо теоретической механике : учебное пособие для тех. вузов / Под ред. А.А. Яблонского. – 7-е изд., испр. – М. : Интеграл-Пресс, 2002. – 384 с.

6 **Павловський, М.А.** Теоретична механіка : підручник. – К. : Техніка, 2002. – 512 с.

7 **Аркуша, А.И.** Руководство к решению задач по теоретической механике : учебное пособие. – 5-е изд., испр. – М. : Высш.шк., 2002. – 336 с.

8 **Божидарнік, В.В.** Методика розв’язання і збірник задач з теоретичної механіки : навч. посіб. / В.В.Божидарнік, Л.Д.Величко. – Луцьк : Надстир’я, 2003. – 496 с.

9 **Мещерский, И.В.** Задачи по теоретической механике : учеб. пособие / Под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – Спб. : Лань, 2003. – 448 с.

10 **Бондаренко, А.А.** Теоретична механіка : підручник у 2-х частинах. Ч.2 / А.А.Бонбаренко, О.О.Дубінін, О.М.Переяславцев. – К. : Знання, 2004. – 590 с.

11 **Федуліна, А.І.** Теоретична механіка : навч. посібник. – К. : Вища шк., 2005. – 319 с.

12 **Токар, А.М.** Теоретична механіка. Динаміка. Методи й задачі : навчальний посібник. – К. : Либідь, 2006. – 440 с.

Навчальне видання

ВОДОЛАЗСЬКА Олена Георгіївна
ПОДЛЄСНИЙ Сергій Володимирович
ІСКРИЦЬКИЙ В'ячеслав Михайлович

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

ДИНАМІКА

Аналітична механіка

Навчальний посібник
для студентів усіх спеціальностей

Редактор І.І.Дьякова

Комп'ютерна верстка О.С.Орда

378/2008 Підп. до друку Формат 60х84/16.
Папір офсетний. Ум. друк. арк. 10,23. Обл.-вид. арк. 7,7.
Тираж прим. Зам. №

Донбаська державна машинобудівна академія
84313, м. Краматорськ, вул. Шкадінова, 72
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру
серія ДК № 1633 від 24.12.2003